

UNIVERSIDADE DE LISBOA  
FACULDADE DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA E INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL



## **Gestão integrada das rotas de entrega e inventário para um produto**

Miguel Alexandre Silva Florindo

**Mestrado em Estatística e Investigação Operacional**  
Especialização em Investigação Operacional

Dissertação orientada por:  
Prof.<sup>a</sup> Doutora Ana Maria Duarte Silva Alves Paias



# Agradecimentos

Este trabalho é dedicado à minha mãe pelo apoio incondicional que me deu durante o meu percurso, não só académico, mas ao longo de toda a minha vida. Agradeço também à minha irmã e aos meus avós pelo incentivo e força para alcançar os meus objetivos.

Agradeço à minha orientadora Professora Ana Maria Duarte Silva Alves Paias, pela sua disponibilidade incansável, partilha de conhecimentos e apoio demonstrado na elaboração da presente dissertação.

Agradeço aos meus amigos de faculdade Jorge, Alexandre e Mariana pelo seu apoio e amizade ao longo deste percurso.

Por último, mas muito importante, agradecer aos meus amigos de sempre, eles sabem quem são e quão importante a sua amizade é para mim.



# Resumo

O problema de gestão integrada das rotas de entrega e inventário para um produto, também designado por *inventory-routing problem* (IRP), determina em simultâneo o controlo do inventário e as rotas dos veículos.

No problema considerado nesta dissertação, o produto é enviado pelo fornecedor para os diversos clientes, de forma a satisfazer as suas procuras fixas ao longo do horizonte temporal pré-estabelecido. Cada cliente tem definido o nível máximo de inventário possível de armazenar. O fornecedor gere o inventário de cada cliente e determina as suas políticas de reabastecimento, evitando assim qualquer tipo de rotura de stock nos seus clientes (técnica *Vendor-Managed-Inventory*, VMI). É considerado que se dispõe de um único veículo com uma capacidade máxima pré-estabelecida e pretende-se que o fornecedor determine as suas rotas de distribuição ao longo do horizonte temporal.

São consideradas as políticas de reabastecimento ML (*maximum-level*), OU (*order-up-to level*) e a NP (nova política proposta nesta dissertação). Na política ML garante-se sempre que o cliente é visitado, a quantidade de inventário a ser entregue não pode exceder o limite máximo do armazém. Na política OU, sempre que o cliente é visitado, a quantidade de inventário a ser entregue é tal que o nível máximo de armazenamento é atingido. Por fim, na nova política pretende-se que cada cliente tenha no final do horizonte temporal o nível de inventário igual ao que tinha no início do horizonte temporal.

Nesta dissertação apresentam-se dois modelos matemáticos em programação linear inteira e mista (PLIM) para cada política de reabastecimento. Consideram-se ainda variantes reforçadas destes modelos com vista a tentar encontrar um método de resolução mais eficiente.

Desta forma, foi realizada uma experiência computacional para comparar os modelos e suas variantes no que diz respeito à qualidade dos limites inferiores, fornecidos pelas respectivas relaxações lineares e também do tempo computacional gasto para os resolver. Comparou-se ainda, segundo os mesmos critérios, a eficiência dos modelos para cada política de reabastecimento. Para realizar os testes computacionais foram utilizadas e adaptadas instâncias apresentadas na literatura. Na experiência computacional considerou-se um número de clientes a variar entre 5 a 50 e um horizonte temporal a variar entre 3 e 10 dias.

**Palavras-Chave:** Gestão de rotas e inventário, Inventário gerido pelo fornecedor, políticas de reabastecimento, Modelos PLIM, Relaxação Linear.



# Abstract

The inventory-routing problem (IRP) determines, simultaneously, inventory controls and vehicle routes.

In this dissertation's problem, the product is shipped by the supplier to several clients, in a way to satisfy their needs, over a given time horizon previously established. Each client has the maximum level of inventory defined. The supplier runs every clients inventory and determines its replenishment policies, avoiding, in this way, the clients stock rupture (Vendor-Managed-Inventory, VMI). It is considered that there is only one vehicle available with a pre established maximum load. The goal is the determination, preformed by the supplier, of the distribution routes, during the initially established time line.

It's considered the ML (maximum-level) replenishment measures, the OU (order-up-to level) and NP (new policy proposed in this dissertation). On ML policy it is guaranteed that every time the client gets visited, the inventory cannot exceed the maximum storage limit. On OU policy, every time that the client gets visited, that amount of inventory is such, that the maximum storage limit is reached. Last but not least, in NP the goal is that every client has the same inventory level when the time horizon ends, as it had in the beginning of it.

The dissertation presents two mixed integer linear programming mathematical models (PLIM), for each replenishment policy. It's considered the reinforced variants in each model with the purpose of trying to find the most effective resolution method. A computational experience has been made, to compare both models and its variants concerning the quality of the lower bounds, provided by its respective linear programming relaxations, as well as the spent computer time used to solve it. Also, it was compared, following the same criteria, the model efficiency for each replenishment policy. To perform the computer tests it was used and adapted instances presented in literature. In the computation experimente, it was considered a number of clients between 5 and 50 and a time horizon varying between 3 to 10 days.

**Keywords:** Inventory-Routing Managment; Vendor-Managed Inventory; Replenishment policy; PLIM models; Linear Programming Relaxation.





# Conteúdo

<b>Lista de Figuras</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xi</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Revisão de Literatura</b>	<b>3</b>
<b>3 Modelos Matemáticos</b>	<b>9</b>
3.1 Definição do problema . . . . .	9
3.2 Formulação . . . . .	10
3.2.1 Modelo base sob a política ML (MB-PML) . . . . .	10
3.2.2 Modelo base sob a política OU (MB-POU) . . . . .	11
3.2.3 Nova variante para o modelo MB-PML . . . . .	13
3.3 Eliminação de subcircuitos . . . . .	14
3.3.1 Modelo Fluxos . . . . .	14
3.3.2 Modelo MTZ . . . . .	15
3.4 Melhoramento dos modelos propostos . . . . .	15
3.5 Exemplo de aplicação . . . . .	17
<b>4 Resultados computacionais</b>	<b>19</b>
4.1 Instâncias de teste . . . . .	19
4.2 Resultados computacionais . . . . .	20
4.2.1 Qualidade da Relaxação Linear . . . . .	22
4.2.2 Comparação entre modelos . . . . .	31
<b>5 Conclusão</b>	<b>47</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>49</b>
<b>A Resultados Completos</b>	<b>51</b>



# Lista de Figuras

3.1	Representação de duas soluções admissíveis correspondentes a duas rotas simétricas num determinado instante $t$ .	16
3.2	Representação de duas soluções admissíveis de rotas simétricas num determinado instante $t$ .	17
3.3	Representação das rotas e quantidade de inventário a enviar a cada cliente sob a política ML na solução ótima.	18
3.4	Representação das rotas e quantidade de inventário a enviar a cada cliente sob a política OU na solução ótima.	18
4.1	Comparação dos Gap para os modelos Fluxos, FluxosY, MTZ e MTZ-Y e respectivas políticas ML e OU.	26
4.2	Comparação baseada na média dos Gap e tempos de CPU (segundos) obtidos nas políticas ML, OU e NP sob o modelo FluxosY.	30
4.3	Comparação dos tempos médios de CPU para os modelos Fluxos e MTZ e respectivas políticas ML e OU.	32
4.4	Comparação dos tempos médios de CPU para os modelos FluxosY e MTZ-Y e respectivas políticas ML e OU.	34
4.5	Comparação dos tempos médios de CPU (segundos) para os modelos Fluxos, FluxosY, MTZ e MTZ-Y e respectivas políticas ML e OU.	35
4.6	Representação das rotas simétricas de uma instância de teste resolvido sob modelo Fluxos para a política ML dado um horizonte temporal $H=10$ .	37
4.7	Comparação dos tempos médios de CPU (segundos) para os modelos FluxosY-QS e MTZ-Y-QS e respectivas políticas ML e OU.	39
4.8	Comparação dos tempos médios de CPU (segundos) para os modelos FluxosY, FluxosY-QS, MTZ-Y e MTZ-Y-QS e respectivas políticas ML e OU.	40
4.9	Comparação dos tempos médios de CPU (segundos) necessários nas políticas ML, OU e NP recorrendo ao modelo FluxosY.	42
4.10	Representação das rotas de uma instância de teste com 10 clientes resolvido sob modelo Fluxos para a política NP dado um horizonte temporal de $H=3$ .	44
4.11	Representação das rotas de uma instância de teste com 10 clientes resolvido sob modelo Fluxos para a política NP dado um horizonte temporal de $H=6$ .	45



# Lista de Tabelas

2.1	Variantes estruturais para um IRP . . . . .	4
4.1	Comparação dos modelos relativamente ao número de variáveis e restrições. . . . .	21
4.2	Resultados médios obtidos pelas relaxações lineares dos modelos Fluxo e MTZ sob as políticas ML e OU e respetivo CPU (segundos). . . . .	22
4.3	Resultados médios obtidos pelas relaxações lineares dos modelos FluxoY e MTZ-Y sob as políticas ML e OU e respetivo CPU (segundos). . . . .	24
4.4	Resultados médios obtidos pelas relaxações lineares dos modelos FluxoY-QS e MTZ-Y-QS sob as políticas ML e OU e respetivo CPU. . . . .	28
4.5	Comparação da média dos valores de Gap e dos tempos de CPU (segundos) obtidos nas políticas ML, OU e NP sob o modelo FluxosY. . . . .	29
4.6	Comparação do tempo médio de CPU (segundos) necessário para resolver os modelos Fluxos e MTZ sob as políticas ML e OU. . . . .	31
4.7	Comparação do tempo médio de CPU (segundos) necessário para resolver os modelos FluxosY e MTZ-Y sob as políticas ML e OU. . . . .	33
4.8	Comparação do tempo médio de CPU (segundos) necessário para resolver os modelos FluxosY-QS e MTZ-Y-QS sob as políticas ML e OU. . . . .	38
4.9	Comparação do número de restrições e variáveis utilizadas nas políticas ML, OU e NP sob o modelo FluxosY. . . . .	41
4.10	Comparação do tempo médio de CPU (segundos) necessários para resolver as políticas ML, OU e NP recorrendo ao modelo FluxosY. . . . .	41
A.1	Resultados obtidos pelos modelos Fluxos, FluxosY e FluxosY-QS sob a política ML em H=3. . . . .	52
A.2	Resultados obtidos pelos modelos MTZ, MTZ-Y e MTZ-Y-QS sob a política ML em H=3. . . . .	53
A.3	Resultados obtidos pelos modelos Fluxos, FluxosY e FluxosY-QS sob a política ML em H=6. . . . .	54
A.4	Resultados obtidos pelos modelos MTZ, MTZY e MTZ-Y-QS sob a política ML em H=6. . . . .	55
A.5	Resultados obtidos pelos modelos Fluxos, FluxosY e FluxosY-QS sob a política ML em H=10. . . . .	56
A.6	Resultados obtidos pelos modelos MTZ, MTZ-Y e MTZ-Y-QS sob a política ML em H=10. . . . .	56
A.7	Resultados obtidos pelos modelos Fluxos, FluxosY e FluxosY-QS sob a política OU em H=3. . . . .	57
A.8	Resultados obtidos pelos modelos MTZ, MTZ-Y e MTZ-Y-QS sob a política OU em H=3. . . . .	58

A.9 Resultados obtidos pelos modelos Fluxos, FluxosY e FluxosY-QS sob a política OU em H=6. . . . .	59
A.10 Resultados obtidos pelos modelos MTZ, MTZ-Y e MTZ-Y-QS sob a política OU em H=6. . . . .	60
A.11 Resultados obtidos pelos modelos Fluxos, FluxosY e FluxosY-QS sob a política OU em H=10. . . . .	61
A.12 Resultados obtidos pelos modelos MTZ, MTZ-Y e MTZ-Y-QS sob a política OU em H=10. . . . .	61
A.13 Resultados obtidos para a nova política NP, recorrendo ao modelo FluxosY em H=3. . . . .	62
A.14 Resultados obtidos para a nova política NP, recorrendo ao modelo FluxosY em H=6. . . . .	62
A.15 Resultados obtidos para a nova política NP, recorrendo ao modelo FluxosY em H=10. . . . .	63

# Capítulo 1

## Introdução

Nas últimas décadas, os avanços tecnológicos e sistemas de informação tiveram grande impacto no aumento da competitividade empresarial a nível global, onde a logística passou a ter um papel fundamental na gestão dos negócios. A logística é uma parte da gestão de cadeias de abastecimento, também conhecida como *supplier chain management* que abrange todas as atividades relacionadas com o funcionamento de um sistema de produção-distribuição, isto é, desde o seu planeamento, controlo e armazenamento de produto até ao ponto de consumo, de forma a satisfazer os requisitos do cliente.

Para que cada empresa se torne competitiva é fulcral que a sua eficiência no mercado esteja relacionada diretamente com o desempenho da cadeia de abastecimento, tendo por objetivo melhorar esse desempenho, onde são cada vez mais as empresas a adotar a técnica de inventário gerido pelo fornecedor (*vendor managed inventory-VMI*).

Na técnica VMI, o fornecedor tem acesso a informações importantes disponibilizadas pelos seus clientes, como o nível atualizado de inventário armazenado, bem como o da sua procura (constante ou não) ao longo do horizonte temporal. Com base nas informações mencionadas anteriormente, o fornecedor organiza um plano de distribuição, no qual determina os dias a visitar os seus clientes, a quantidade de produto a enviar e define a sua distribuição de rotas, trazendo benefícios para ambas as partes, uma vez que os clientes passam a ter um menor investimento de recursos para controlo do nível de inventário e respetivos pedidos de inventário. Assim, com a adoção desta técnica o fornecedor assume um maior controlo na gestão dos inventários dos seus clientes. No lado do fornecedor, os principais benefícios estão na redução dos custos na produção de inventário e posteriormente numa redução do custo de transporte através de uma utilização mais uniforme da capacidade de transporte.

Nesta dissertação, pretende-se estudar o problema de gestão integrada das rotas de entrega e inventário para um produto, considerando um horizonte temporal já pré-estabelecido. Dentro desse horizonte temporal, as quantidades de inventário a serem entregues aos respetivos clientes desse dia têm de ser efetuadas no dia previsto, evitando assim a possibilidade de ocorrerem atrasos nas suas entregas. Cada cliente pode ser visitado mais que uma vez ao longo do horizonte temporal, sendo que a sua procura de produto não sofre alterações durante esse intervalo de tempo. O produto a ser enviado pelo fornecedor será transportado por um veículo com capacidade limitada e pré-definida.

Neste problema serão consideradas as duas políticas de reabastecimento mais utilizadas em problemas de *inventory-routing*, sendo elas a política ML (*maximum-level*) e a política OU (*Order-up-to level*). Por fim, será apresentada ainda uma nova variante de reabastecimento de inventário para os clientes para este problema. Na política ML, sempre que o cliente seja visitado, a quantidade de inventário a ser entregue não pode exceder o nível máximo de armazenamento do cliente. Para a política OU, sempre que o cliente for visitado, a quantidade de inventário a ser entregue é tal que o nível máximo de armazenamento

---

é atingido. Em relação à nova variante, dado um horizonte temporal pré-estabelecido, a quantidade inicial de inventário armazenado em cada cliente no início do horizonte ( $H=0$ ) tem de ser apenas igual à quantidade de inventário armazenado no final do horizonte temporal. O objetivo deste problema reside na minimização dos custos de deslocação juntamente com o custo de armazenamento do fornecedor e respectivos clientes, de forma a não ocorrer a tal rotura de *stock* já referida anteriormente.

O caso de estudo desta dissertação tem semelhanças com algumas variantes de um problema muito estudado, o problema de Roteamento de Veículos (*Vehicle Routing Problem-VRP*). No segmento da secção da revisão da literatura evidenciam-se as diferenças e semelhanças existentes nos problemas mencionados anteriormente com referência ainda para a técnica RMI (*Retailer Management Inventory*).

Para um problema desta complexidade e tendo em conta os dados presentes nas instâncias consideradas no caso de estudo, de elevada dimensão, espera-se que a obtenção de soluções seja de elevada complexidade. Para tal, é importante definir prioridades, ou seja, decidir se o mais importante será ter uma boa solução tendo em conta o tempo que levará até obtê-la ou uma solução menos boa, mas obtida num tempo razoável. Estes tipos de decisões são importantes para as empresas, caso tenham uma certa urgência a obter resultados.

Com base nas observações referidas acima, o objetivo será propor dois modelos para cada política de reabastecimento (ML e OU) formulados em programação linear inteira mista (PLIM), comparar e analisar os resultados obtidos através dos tempos de computação e limites dados pelas relaxações Lineares. Para implementar e testar os todos modelos, foi utilizado o *software IBM ILOG CPLEX Optimization Studio OPL V12.9*.

A dissertação está dividida em 5 capítulos. No capítulo 2 faz-se referência aos artigos e documentos consultados para desenvolver este trabalho, onde é feita uma comparação dos problemas IRP(*Inventory-Routing Problem*) e VRP, bem como das técnicas VMI e RMI. Ainda neste capítulo são mencionados alguns algoritmos exactos e métodos heurísticos que foram desenvolvidos para a resolução deste tipo de problemas. No capítulo 3, são apresentados os modelos matemáticos, bem como desigualdades válidas que permitem fortalecer os modelos. No capítulo 4 é apresentada a experiência computacional realizada com o intuito de avaliar e comparar o desempenho dos diferentes modelos. Por último, no capítulo 5, apresentam-se as conclusões acerca de todo o trabalho elaborado, assim como algumas sugestões para futuros trabalhos.



## Capítulo 2

# Revisão de Literatura

O problema em estudo, gestão integrada de rotas de entrega e inventário para um produto, também conhecido por *inventory-routing problem* (IRP) pode ser definido da seguinte forma: considerando um conjunto de clientes para os quais se conhece a procura de um determinado produto ao longo de um horizonte temporal pré-estabelecido. A capacidade dos armazéns no fornecedor e respectivos clientes. A capacidade do único veículo que faz as entregas. Pretende-se determinar como deve o fornecedor gerir o inventário de cada cliente, determinando quando e quanto produto envia em cada dia do horizonte temporal bem como determinar as rotas de entrega, garantindo a satisfação da procura e satisfazendo todas as capacidades.

Neste capítulo pretende-se explicar principalmente como surgiu o IRP e quais as suas vantagens em relação ao método tradicionalmente utilizado. Por fim, como os IRPs são considerados NP-hard, serão mencionados métodos exatos e heurísticos para a sua resolução.

Os primeiros estudos publicados para o IRP surgiram nos anos 80, decorrentes de modelos projetados para problemas de roteamento de veículos (VRP) e, heurísticas desenvolvidas para levar em consideração os custos do inventário. Bell et al. (1983) consideram apenas os custos de inventário, onde a procura era estocástica e os níveis do inventário tinham de ser satisfeitos. Blumenfeld et al. (1985) consideram os custos da produção, distribuição e inventário. Estes são apenas alguns artigos iniciais sobre IRP, em que na sua maioria consideraram uma procura determinística e conhecida.

O IRP surgiu no contexto do inventário gerido pelo fornecedor (VMI), tendo como objetivo reduzir os custos de logística através da integração da gestão do inventário de um ou mais produtos com a sua distribuição pela cadeia de abastecimento, também conhecida por *supply chain*. O IRP, é a consequência de uma nova abordagem de modelação e otimização de cadeias de abastecimento baseada na ideia de integração dos diversos componentes logísticos (Campbell, Clarke e Savelsbergh 2002). A política VMI corresponde a uma abordagem integrada/totalmente centralizada, onde o fornecedor toma três decisões em simultâneo: monitoriza o nível de inventário de cada cliente; determina quando e quanto de inventário envia para cada cliente, e combina os clientes em rotas de veículos. Este método, é frequentemente descrito como uma situação *win-win*, uma vez que o fornecedor minimiza os custos de distribuição (onde pode coordenar os envios feitos para diferentes clientes). Relativamente aos clientes, também beneficiam ao não alocarem esforços para o controlo do inventário.

Antes dos grandes avanços tecnológicos e adoção do conceito da gestão de cadeias de abastecimento, era aplicado e ainda é aplicado atualmente em alguns casos específicos de menores escalas, a política *re-tailer management inventory* (RMI). Na política tradicional RMI é realizada uma abordagem sequencial à gestão de inventário e distribuição, onde as decisões do inventário são da responsabilidade dos clientes (quanto e quando pedir de inventário), ficando apenas o fornecedor com a organização da distribuição

das rotas. Este problema de elaboração de rotas é denominado como um problema de roteamento de veículos ou *vehicle routing problem* (VRP) [12]. No VRP, o horizonte temporal é de curto prazo, geralmente só num único dia, tendo como objetivo determinar as rotas de veículos que minimizam os custos de transportes, de forma a satisfazer as procuras de cada cliente, respeitando as restrições das capacidades dos veículos. No que diz respeito ao IRP, o problema apresenta-se mais complexo, uma vez que o horizonte temporal é maior. O seu objetivo passa por determinar os dias em que cada cliente é visitado e a quantidade de inventário a entregar a cada um, minimizando os custos de inventário e distribuição, sob a restrição de que a procura de cada cliente seja satisfeita e respeitando a capacidade dos veículos.

As vantagens na utilização de uma política VMI em relação à política RMI consiste numa utilização mais eficiente dos recursos. Por um lado, o fornecedor pode reduzir o seu inventário, mantendo o mesmo nível de serviço, ou pode aumentar o nível de serviço e reduzir o custo de transporte através de uma utilização mais uniforme da capacidade de transporte. De outra forma, os clientes podem dedicar menos recursos para monitorizar o inventário e fazer pedidos, tendo de garantir que não haverá rotura de stock.

No artigo [6] de Archetti et al., os autores analisaram os benefícios da integração de gestão do inventário e distribuição comparando as soluções sob a política VMI integrada com as soluções sob a política RMI sequencial. De seguida, introduziram também, uma nova variante da política VMI, onde acrescentaram uma nova restrição (o nível de inventário final de cada cliente é igual ao nível de inventário final na política RMI). Os resultados obtidos revelam que as políticas de VMI e sua variante podem alcançar melhores soluções, tanto no número de veículos utilizados como também no custo total do inventário. Estas poupanças sob a política integrada são realmente relevantes, pois em média obtiveram uma redução de 9.49% em termos de custos totais e 9.06% em termos de número de veículos.

Nas últimas décadas surgiram muitas variantes do IRP, no entanto, não existe uma versão padrão para o problema IRP. Andersson et al. (2010) e Coelho et al. (2012) classificam IRPs em dois esquemas: variantes estruturais presentes nos IRPs e disponibilidade de informação sobre a procura.

Tabela 2.1: Variantes estruturais para um IRP

<b>Crítérios</b>	<b>Possibilidades</b>		
Horizonte temporal	Finito	Infinito	
Estrutura	um para um	um para vários	vários para vários
Roteamento	Direto	vários	contínuo
Política de inventário	<i>Maximum Level (ML)</i>	<i>Order-up-to level (OU)</i>	
Decisões de inventário	Perda de vendas	Ordem inversa	Não negativo
Composição da frota	Homogéneo	Heterogéneo	
Tamanho da frota	Um	Vários	Sem restrições

As variantes estruturais de um IRP podem ser classificadas de acordo com os seguintes critérios: o horizonte do tempo; a Estrutura; o Roteamento; a política de inventário; as decisões de inventário; a composição da frota e o tamanho da frota.

- O horizonte temporal pode ser classificado como finito, onde a duração do horizonte de planeamento depende do problema em causa (um horizonte curto é mais operacional que um horizonte longo) ou infinito que no caso do IRP pretende determinar um plano de distribuição de longo prazo, como por exemplo determinar a frota de veículos, o número de motoristas e a organização da área de distribuição nas regiões pretendidas.
- Como o número de fornecedores e clientes pode variar, então a estrutura pode ser de um para um quando só há um fornecedor a atender um cliente; um para muitos, no caso mais comum com

um fornecedor e vários clientes e por fim, com menos frequência, muitos para muitos com vários fornecedores e vários clientes.

- O Roteamento pode ser direto, quando só existe apenas um cliente; vários quando existem vários clientes na mesma rota e por último, os contínuos onde não existe depósito central, como em várias aplicações marítimas.
- As políticas de inventário são definidas por regras pré-estabelecidas com fim a reabastecer os clientes. Deste modo, há várias políticas, mas as mais comuns e geralmente as mais utilizadas nos IRPs são a política *maximum level* (ML) e a política *order-up-to-level* (OU). A primeira política mencionada acima, revela um nível de reabastecimento flexível, contudo limitado pela capacidade disponível em cada cliente. Na segunda política citada, sempre que um cliente é visitado, a quantidade a entregar tem de preencher a sua capacidade de inventário. Com base no artigo [16] Leandro C. Coelho, os autores sugerem uma nova política de inventário, designada por *optimised target-level* (OTL), que combina as vantagens referentes aos clientes na política OU e as vantagens do fornecedor na política ML, onde proporciona mais flexibilidade e menos custos no sistema. Esta política determina um nível ideal para cada cliente. Por outro lado, pode ser vista como uma política OU otimizada, exceto o facto de que ao invés de reabastecer a capacidade do cliente, o fornecedor preenche o inventário do cliente até um OTL. Os resultados revelam que a política OTL apresenta soluções menos dispendiosas do que a política OU, porém apresenta um aumento no tempo computacional o que pode ser um entrave para as empresas.
- As decisões de inventário têm o objetivo de determinar como a gestão do inventário é modelada. Se for permitido que o inventário se torne negativo, ocorrerá a ordem inversa e a procura correspondente só será atendida num estágio posterior; se não houver pedidos em atraso, a procura extra será considerada como perda de vendas. Em ambos os casos, poderá ocorrer uma penalização para a falta de inventário. Num contexto determinístico pode-se considerar o inventário como não negativo.
- A frota pode ser considerada homogéneo, caso a capacidade de todos os veículos seja a mesma ou heterogéneo, onde existem diferentes capacidades na frota.
- O número de veículos disponíveis pode ser fixado em um, em muitos ou sem limitações.

A segunda classificação corresponde ao momento em que a informação da procura se torna conhecida. No caso desta informação estar totalmente disponível para o agente de decisão no início do horizonte do planeamento, então estamos perante o problema que é considerado determinístico. Se a sua distribuição de probabilidade é conhecida no início do planeamento, então o problema é considerado estocástico que produz o problema estocástico de roteamento de inventário (SIRP). Os IRPs dinâmicos surgem quando a procura não é totalmente conhecida inicialmente, mas é gradualmente revelada ao longo do horizonte temporal. Neste caso, ainda é possível explorar a sua distribuição no processo de solução, gerando um problema de roteamento de inventário dinâmico e estocástico (DSIRP).

Na literatura são propostos métodos exatos para a resolução de IRP. Contudo, o IRP é considerado um problema NP-Hard visto que incluem o VRP, para tal a maioria dos artigos propõe algoritmos heurísticos de modo a encontrar uma solução.

- Algoritmos exatos:

---

Nos algoritmos exatos, Archetti et al. (2007)[3] desenvolveram o primeiro algoritmo *Branch-and-cut* para um IRP de veículo único. Sempre que uma restrição de eliminação de subcircuito é violada, essa restrição é identificada e adicionada ao subproblema e reotimizada. A pesquisa é desenvolvida de acordo com a melhor estratégia inicial e o limite superior inicial é obtido através da heurística desenvolvida por Bertazzi, Paletta e Speranza [7] em 2002. Este algoritmo é capaz de resolver as versões da política OU e da política ML. Segundo Archetti et al., este também implementou algumas desigualdades válidas de modo a fortalecer o modelo e a de serem capazes de o resolver para instâncias até 50 clientes num horizonte de três períodos e 30 clientes num horizonte de seis períodos. Além disto, referir ainda que apesar de considerar apenas um veículo, o autor não teve só em conta os custos de manutenção do inventário nos clientes, mas também no fornecedor.

Em 2011, Solyalı e Süral [17] aperfeiçoaram a formulação, sob apenas a política OU, com redes de caminho mais curto para o reabastecimento dos clientes, bem como um limite superior inicial através de uma heurística para o algoritmo *Branch-and-cut*. Neste artigo, os autores utilizaram instâncias de 15 clientes com um horizonte temporal de 12, de 25 clientes com um horizonte temporal de 9 e de 60 clientes com um horizonte temporal de 3.

Em 2013 Coelho e Laporte aplicaram o algoritmo *Branch-and-cut* para um IRP de vários veículos, sob as políticas OU e ML e além disso geraram as suas próprias instâncias de teste. Mais tarde, no artigo [15] de Coelho et al., implementaram um melhoramento das soluções de IRP, através de novas desigualdades válidas, sob a relação da procura e as capacidades disponíveis e uma nova ordem de entrada dos clientes que revelaram uma grande melhoria na relaxação linear na maioria das instâncias usadas anteriormente.

- Algoritmos heurísticos:

Nos primeiros artigos de IRP com algoritmos heurísticos, os autores aplicaram heurísticas simples a versões simplificadas do problema. O espaço da solução era explorado através de estruturas de vizinhança simples, onde normalmente o processo era feito sob uma decomposição do IRP em subproblemas hierárquicos e a solução desse subproblema era usada na próxima etapa. Alguns desses exemplos incluem heurística de atribuição (Dror, Ball e Golden 1985), compensações baseadas em custos aproximados de roteamento (Burns et al. 1985), heurística de agrupamento (Anily e Federgruen 1990), entre outros. Os algoritmos heurísticos mais recentes, são capazes de obter soluções mais eficazes para problemas difíceis de otimização baseando-se no conceito metaheurísticas, que aplicam procedimentos sob uma pesquisa local e estratégias para evitar ótimos locais, realizando uma pesquisa completa ao espaço de pesquisa (Gendreau e Potvin 2010). Novos avanços nesta área incluem a hibridação de diferentes conceitos metaheurístico de modo a criar algoritmos mais poderosos (Raidl, Puchinger e Blum 2010), bem como a hibridação de um algoritmo heurístico e de programação matemática, produzindo os chamados algoritmos matemáticos.

Em 2012, Archetti et al.[2] desenvolveram a heurística híbrida para um IRP de único veículo que combina a *tabu search* com soluções exatas de PLIM usados para aproximar decisões de roteamento. A partir de uma solução admissível, o algoritmo explora a vizinhança da solução atual e realiza saltos ocasionais para novas regiões de espaço de pesquisa. Temporariamente as soluções não admissíveis são aceites, ou seja, caso haja uma rotura de *stock* no fornecedor ou a capacidade

do veículo é excedida. Na fase de melhoramento da heurística, os autores resolvem dois MIPs: primeiro, dado uma solução  $s$ , tentar melhorar atribuindo rotas distintas a diferentes períodos de tempo, sem adicionar novos clientes às rotas; segundo, dado a mesma a solução  $s$ , não há alteração no tempo atribuído a cada rota de veículos, enquanto que é permitido a remoção de inserção de clientes em rotas. Os resultados desta heurística apresentaram um gap abaixo de 0.1%. Ainda em 2012, no artigo [13] de Coelho et al. revelaram uma metaheurística *adaptive large neighborhood search* (ALNS) que pode solucionar o IRP como um caso de um problema mais amplo, incluindo *transshipments*. Este algoritmo é elaborado em duas fases: em primeiro, na criação de rotas de veículos sob ALNS, de seguida na determinação das quantidades de entrega usando um algoritmo de fluxo de custo mínimo exato (quando não incluídos *transshipments*, a metaheurística tem um pior desempenho em relação ao algoritmo de Archetti et al. [2]). Por fim, os autores elaboraram uma extensão do algoritmo anterior para a versão de vários veículos. Nesse problema, o ALNS cria rotas de veículos, enquanto as quantidades de entregas são novamente otimizadas sob um algoritmo de fluxo de redes de custo mínimo. De seguida, as melhores soluções são obtidas com a aproximação dos custos de inserir/remover clientes existentes através da solução exata de um PLIM, como afirmam Archetti et al. (2012).

Em 2016, no artigo [5] Archetti et al. apresentaram uma metaheurística que combina *tabu search* e fórmulas de programação matemática. Este algoritmo é apelidado pelos autores como MORTAR (*MOdel Relaxations, Tabu search And Restriction*), onde é dividido em três fases (fase 1: geração de uma solução inicial; fase 2: *tabu search* e fase 3: melhoramento). As fases 1 e 3 usam modelos de programação matemática (PLIM), dependendo do número de clientes. Caso o número de clientes seja inferior ao limite pré-estabelecido, então na fase 1 o problema é resolvido com a integralidade das variáveis de roteamento relaxadas e na fase 3 o melhoramento é feito com algumas variáveis fixadas de acordo com a frequência observada no *tabu search*. Se o número de clientes é superior ao limite pré-estabelecido, neste caso para a fase 1 o problema é resolvido com variáveis de roteamento agregadas e integralidade relaxada e, na fase 3, o melhoramento é baseado na seleção de rotas, usando rotas encontradas pelo *tabu search* e algumas variáveis fixas de acordo com a frequência observada no *tabu search*.



## Capítulo 3

# Modelos Matemáticos

No presente capítulo descreve-se o problema de gestão integrada de rotas e inventário para um produto o qual se pretende estudar, bem como as variantes consideradas. Na secção 3.2 serão apresentados modelos para o problema em questão e variantes (secção 3.3). Serão mencionadas algumas sugestões de melhoramento dos modelos propostos. Por fim, na secção 3.5, serão apresentados alguns exemplos de aplicação de forma a compreender melhor como funcionam as variantes do problema.

### 3.1 Definição do problema

O problema de gestão de rotas e inventário para um produto pode ser definido num grafo  $G=(V,A)$ , em que  $V = N \cup \{0\}$  é o conjunto de todos os vértices, onde o vértice  $\{0\}$  representa o fornecedor e os restantes vértices  $i \in N = \{1, \dots, n\}$  correspondem aos  $n$  clientes. O conjunto  $A = \{(i, j) : i, j \in V\}$  é o conjunto dos arcos e representa as possíveis deslocações entre clientes e entre clientes e fornecedor. O horizonte temporal  $T$  está dividido em  $H$  períodos e é dado por  $T = \{1, \dots, H\}$ .

A cada arco  $(i, j) \in A$  associa-se um custo de transporte  $c_{ij}$  que indica o custo de deslocação do vértice  $i$  para o vértice  $j$ . A cada cliente e fornecedor está associado um custo  $h_i$  ( $i \in V$ ) de armazenamento de inventário no período  $t$ , onde cada cliente  $i$  tem uma capacidade máxima de armazenamento  $C_i$ . No início do horizonte de planeamento, o agente de decisão tem conhecimento do nível atual do inventário do fornecedor e clientes  $(I_i^0, i \in V)$ . O fornecedor disponibiliza ou produz uma quantidade do produto  $r_0^t$  e recebe informação da procura  $r_i^t$  de cada cliente  $i$  para cada período  $t$ . O envio do produto para os clientes é realizado por um veículo de capacidade  $Q$ . Nos períodos em que seja necessário fazer entrega de produto, a rota do veículo inicia e termina no fornecedor. Em relação à política de reabastecimento, nesta dissertação consideram-se duas variantes:

- Política *ML*, onde a quantidade de produto entregue em cada visita aos clientes é otimizada garantido que a capacidade do respetivo armazém é respeitada.
- Política *OU*, em que cada visita aos clientes é entregue a quantidade de produto necessária para que o respetivo armazém fique lotado.

Nesta dissertação é assumido que o fornecedor tem inventário suficiente para satisfazer toda a procura dos clientes ao longo do horizonte de planeamento e que todas as decisões devem ser tomadas de tal forma que não ocorra rotura de *stock* no fornecedor ou nos clientes. A procura de cada cliente em cada período é conhecida *a priori* e deve ser totalmente satisfeita nesse período. Assume-se que a capacidade do veículo é suficiente para que em cada período, caso seja necessário, visitar todos os clientes.

O objetivo do problema consiste em determinar um conjunto de rotas do veículo e as quantidades a entregar a cada cliente ao longo do horizonte temporal  $T$ , de modo a garantir que toda a procura seja satisfeita e que minimize o custo total de transporte e de armazenamento de inventário.

### 3.2 Formulação

Nesta secção apresentam-se dois modelos em Programação Linear Inteira e Mista (PLIM) para o problema em estudo e suas variantes com o objetivo referido anteriormente de minimizar os custos de transporte e armazenamento de inventário. Para cada política estudada é apresentado um modelo base semelhante às formulações propostas em Archetti et al. [3], Bertazzi et al. [10] e Archetti et al. [4].

Nos modelos base são consideradas variáveis de decisão binárias de rota  $x_{ij}^t$ , que tomam valor igual a 1 caso o arco  $(i, j)$  esteja inserido na rota do período  $t$ ,  $\forall t \in T$ , e 0 caso contrário. A variável de decisão binária  $y_0^t$  toma o valor 1 se no período  $t$  houver pelo menos uma entrega, ou seja, se nesse período existe uma rota, e toma o valor 0 no caso contrário. As variáveis de decisão binárias  $y_i^t, \forall i \in N$ , indicam se o respetivo cliente é visitado na rota do período  $t$ . As variáveis de decisão  $I_i^t, \forall i \in V$ , indicam o nível de inventário no fornecedor e nos clientes no fim de cada período  $t$ . Por fim, as variáveis de decisão  $q_i^t, \forall i \in N$  representam a quantidade de inventário a entregar a cada cliente  $i$  visitado pela rota do período  $t$ .

#### 3.2.1 Modelo base sob a política ML (MB-PML)

Na política de reabastecimento ML é necessário satisfazer as seguintes condições: não pode ocorrer nenhuma rotura de inventário no fornecedor ou no inventário dos respetivos clientes; O inventário de cada cliente calculado no período  $t$  não pode exceder o nível máximo de inventário dos mesmos,  $C_i$ ; Por fim, a capacidade do veículo é satisfeita em cada período  $t$ , nunca excedendo o seu limite de carga máxima. O modelo base sob a política ML é definido da seguinte forma:

$$\min \sum_{i \in N \cup \{0\}} \sum_{t \in T} h_i I_i^t + \sum_{(i,j) \in A} \sum_{t \in T} c_{ij} x_{ij}^t \quad (3.1)$$

$$s.a : I_0^t = I_0^{t-1} + r_0^t - \sum_{i \in N} q_i^t \quad \forall t \in T, \quad (3.2)$$

$$I_i^t = I_i^{t-1} + q_i^t - r_i^t \quad \forall i \in N, \forall t \in T, \quad (3.3)$$

$$I_i^t \leq C_i \quad \forall i \in N, \forall t \in T, \quad (3.4)$$

$$q_i^t \leq C_i - I_i^{t-1} \quad \forall i \in N, \forall t \in T, \quad (3.5)$$

$$q_i^t \leq C_i y_i^t \quad \forall i \in N, \forall t \in T, \quad (3.6)$$

$$\sum_{i \in N} q_i^t \leq Q \quad \forall t \in T, \quad (3.7)$$

$$\sum_{j \in N \cup \{0\}} x_{ij}^t = y_i^t \quad \forall i \in N, \forall t \in T, \quad (3.8)$$

$$\sum_{i \in N \cup \{0\}} x_{ij}^t = y_j^t \quad \forall j \in N, \forall t \in T, \quad (3.9)$$



$$\sum_{(ij) \in A} x_{ij}^t - \sum_{(ji) \in A} x_{ji}^t = 0 \quad \forall i \in N \cup \{0\}, \forall t \in T, \quad (3.10)$$

$$\sum_{j \in N} x_{0j}^t = y_0^t \quad \forall t \in T, \quad (3.11)$$

$$\{(i, j) \in A : x_{ij}^t = 1\} \text{ é um circuito conexo} \quad \forall t \in T, \quad (3.12)$$

$$x_{ij}^t \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A, \forall t \in T, \quad (3.13)$$

$$y_i^t \in \{0, 1\} \quad i \in N \cup \{0\}, \forall t \in T, \quad (3.14)$$

$$I_0^t, I_i^t \geq 0 \quad \forall i \in N, \forall t \in T, \quad (3.15)$$

$$q_i^t \geq 0 \quad \forall i \in N, \forall t \in T, \quad (3.16)$$

A função objetivo (3.1) visa minimizar os custos de armazenamento de inventário no fornecedor e nos clientes, juntamente com o custo das rotas ao longo do horizonte de planeamento. As restrições (3.2) e (3.3) estão associadas à conservação de inventário no fornecedor e nos clientes. Assim, para o conjunto de restrições (3.2), a quantidade a ser entregue pelo fornecedor no período  $t$  não deve ser maior que a quantidade disponível no início do período  $t$  mais o número de unidades produzidas no período  $t$ , evitando a possibilidade de rotura de inventário no fornecedor. O mesmo se pretende para o conjunto de restrições (3.3), ou seja, a quantidade disponível no início do período  $t$  mais a quantidade entregue pelo fornecedor no momento  $t$  não deve ser inferior ao número da procura gasta em  $t$ . As restrições (3.4) garantem que a capacidade de armazenamento não pode exceder a capacidade máxima do armazém em cada cliente. As restrições (3.5) estão associadas ao limite de quantidade a ser enviada para cada cliente de forma a satisfazer a sua procura e respetiva capacidade de inventário. As restrições (3.6) garantem que a quantidade a enviar não deve exceder a capacidade de armazém dos respetivos clientes inseridos na rota, ou seja, a quantidade de inventário a ser enviada para o cliente terá de ser menor ou igual a sua capacidade de armazenamento. As restrições (3.7) asseguram que a quantidade total de inventário a entregar aos clientes não exceda a capacidade máxima do veículo. As restrições (3.8)-(3.10) garantem a conservação de fluxo no fornecedor e clientes. As restrições (3.11) asseguram, caso haja, a existência de rota no respetivo instante  $t$ . As restrições (3.12) garantem apenas um circuito conexo, não impedindo a existência de subcircuitos que não contenham o fornecedor. Por fim, o conjunto de restrições (3.13)-(3.16) definem o domínio das variáveis.

### 3.2.2 Modelo base sob a política OU (MB-POU)

Quando se adota a política de reabastecimento OU todas as condições mencionadas para a política ML têm de ser satisfeitas, exceto quando o cliente é visitado, a sua quantidade de inventário terá de preencher na totalidade a sua capacidade de armazenamento no início do período  $t$ . O modelo base sob a política OU é definido da seguinte forma:

$$\min \sum_{i \in N \cup \{0\}} \sum_{t \in T} h_i I_i^t + \sum_{(i,j) \in A} \sum_{t \in T} c_{ij} x_{ij}^t \quad (3.17)$$

$$s.a : I_0^t = I_0^{t-1} + r_0^t - \sum_{i \in N} q_i^t \quad \forall t \in T, \quad (3.18)$$

$$I_i^t = I_i^{t-1} + q_i^t - r_i^t \quad \forall i \in N, \forall t \in T, \quad (3.19)$$

$$I_i^t \leq C_i \quad \forall i \in N, \forall t \in T, \quad (3.20)$$

$$q_i^t \leq C_i - I_i^{t-1} \quad \forall i \in N, \forall t \in T, \quad (3.21)$$

$$q_i^t \geq C_i y_i^t - I_i^{t-1} \quad \forall i \in N, \forall t \in T \quad (3.22)$$

$$q_i^t \leq C_i y_i^t \quad \forall i \in N, \forall t \in T, \quad (3.23)$$

$$\sum_{i \in N} q_i^t \leq Q \quad \forall t \in T, \quad (3.24)$$

$$\sum_{j \in N \cup \{0\}} x_{ij}^t = y_i^t \quad \forall i \in N, \forall t \in T, \quad (3.25)$$

$$\sum_{i \in N \cup \{0\}} x_{ij}^t = y_j^t \quad \forall j \in N, \forall t \in T, \quad (3.26)$$

$$\sum_{(ij) \in A} x_{ij}^t - \sum_{(ji) \in A} x_{ji}^t = 0 \quad \forall i \in N \cup \{0\}, \forall t \in T, \quad (3.27)$$

$$\sum_{j \in N} x_{0j}^t = y_0^t \quad \forall t \in T, \quad (3.28)$$

$$\{(i, j) \in A : x_{ij}^t = 1\} \text{ é um circuito conexo} \quad \forall t \in T, \quad (3.29)$$

$$x_{ij}^t \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A, \forall t \in T, \quad (3.30)$$

$$y_i^t \in \{0, 1\} \quad i \in N \cup \{0\}, \forall t \in T, \quad (3.31)$$

$$I_0^t, I_i^t \geq 0 \quad \forall i \in N, \forall t \in T, \quad (3.32)$$

$$q_i^t \geq 0 \quad \forall i \in N, \forall t \in T, \quad (3.33)$$

A função objetivo (3.17) visa minimizar os custos de armazenamento de inventário no fornecedor e nos clientes, juntamente com o custo das rotas ao longo do horizonte de planeamento. As restrições (3.18) e (3.19) estão associadas à conservação de inventário no fornecedor e nos clientes. Desta forma, as restrições (3.2) pretendem assegurar que, a quantidade a ser entregue pelo fornecedor no período  $t$  não deve ser maior que a quantidade disponível no início do período  $t$  mais o número de unidades produzidas no período  $t$ , evitando a possibilidade de rotura de inventário no fornecedor. Assim, o mesmo se pretende para o conjunto de restrições (3.3), ou seja, a quantidade disponível no início do período  $t$  mais a quantidade entregue pelo fornecedor no momento  $t$  não deve ser inferior ao número da procura gasta em  $t$ . As restrições (3.20) garantem que a capacidade de armazenamento não pode exceder a capacidade máxima do armazém em cada cliente. As restrições (3.21) estão associadas ao limite de quantidade a ser enviada para cada cliente de forma a satisfazer a sua procura e respetiva capacidade de inventário. O conjunto de restrições (3.22) asseguram sempre que um cliente seja visitado,  $y_i^t = 1$ , tenha a receber uma quantidade de inventário que preencha na totalidade a sua capacidade de armazenamento, no início do período  $t$ . As restrições (3.23) garantem que a quantidade a enviar não deve exceder a capacidade de armazém dos respetivos clientes inseridos na rota. As restrições (3.24) asseguram que a quantidade total de inventário a entregar aos clientes não exceda a capacidade máxima do veículo. As restrições (3.25)-(3.27) garantem a conservação de fluxo no fornecedor e clientes. As restrições (3.28) asseguram, caso haja, a existência de rota no respetivo instante  $t$ . As restrições (3.29) garantem apenas um circuito conexo, não impedindo a existência de subcircuitos que não contenham o fornecedor. Por fim, o conjunto de restrições (3.30)-(3.33) definem o domínio das variáveis.

### 3.2.3 Nova variante para o modelo MB-PML

Como foi descrito anteriormente, o fornecedor tem conhecimento do nível actual do inventário dos seus clientes com o intuito de satisfazer as suas necessidades ao longo de um dado horizonte temporal. Assim, desde que os clientes tenham inventário suficiente para satisfazerem a sua procura, é relevante a existência (caso esteja a ser usada a política de reabastecimento OU) ou não de inventário armazenado no final do horizonte temporal.

A implementação desta nova variante no problema tem como objetivo, no final do horizonte temporal, cada cliente ter o mesmo nível de inventário que no início do problema. Desta forma, a nova variante só faz sentido ser introduzida no modelo MB-PML, pelo simples facto de que sob a política de reabastecimento OU é necessário encher o armazém na sua totalidade cada vez que o cliente for visitado. Para tal, basta adicionar a seguinte restrição ao modelo MB-PML:

$$I_i^0 = I_i^H \quad \forall i \in N \quad (3.34)$$

A ideia desta nova variante (3.34) surge porque muitas vezes a duração do horizonte temporal não reflete a duração real do período de planeamento. Por razões operacionais e principalmente nos casos que envolvem muitos clientes e o horizonte temporal é longo pode ser conveniente dividir o horizonte de planeamento em horizontes mais pequenos e para os quais é mais fácil fazer o planeamento. Neste caso, podemos obter uma solução admissível para o problema global pela simples combinação das soluções parciais para os horizontes temporais parciais. Por outro lado, mesmo que a duração do período de planeamento reflita a duração real do mesmo, isso não significa que após esse período o negócio desapareça.

Na maioria dos casos, significa apenas que após esse período se irão atualizar as estimativas para a procura dos clientes, as estimativas da quantidade fornecida pelo fornecedor, etc. Nesta situação, em que a operação continua, será melhor considerar que existe uma certa continuidade na política de reabastecimento do que fazer o planeamento assumindo que após o fim do horizonte temporal não interessa o que fica nos armazéns como se a empresa fosse fechar.

### 3.3 Eliminação de subcircuitos

Os modelos base MB-PML e MB-POU apresentados anteriormente são semelhantes aos modelos da literatura como se mencionou anteriormente. No entanto o modo como iremos modelar as restrições genéricas (3.12) e (3.29) é distinto. Nos artigos de Archetti et al [3] e Bertazzi et al. [10] mencionados são considerados modelos não compactos, onde é aplicado o algoritmo *Branch-and-cut* desenvolvido em 2007 por Archetti et al [3]. com o objetivo de eliminar a existência de subcircuitos na rota. Este algoritmo, mencionado na revisão de literatura, detecta as restrições de eliminação de subcircuitos violadas e adiciona-as ao subproblema e o processo é repetido até não existirem subcircuitos.

Nesta dissertação serão consideradas duas maneiras de modelar as restrições genéricas mencionadas de forma a obter modelos compactos que possam ser resolvidos recorrendo a uma *solver* comercial. As restrições de conservação de fluxo (3.12 e 3.29) garantem que a solução é conexa, mas não impedem a existência de subcircuitos que não contenham o fornecedor. Desta forma, serão apresentados de seguida os dois modelos (modelo Fluxos e modelo MTZ) com o objetivo de eliminar estes subcircuitos.

#### 3.3.1 Modelo Fluxos

No modelo Fluxos serão definidas as variáveis de decisão  $f_{ij}^t$  que representam a quantidade de fluxo que passa no arco  $(i, j)$  na rota do período  $t$ , ou seja, o número de clientes que ainda vão ser visitados depois do cliente  $j$ . Para a formulação do modelo de Fluxos basta apenas retirar as restrições genéricas (3.12) e (3.29) dos modelos base e adicionar as seguintes restrições:

$$\sum_{j \in N} f_{0j}^t = \sum_{j \in N} y_j^t \quad \forall t \in T, \quad (3.35)$$

$$\sum_{j \in N \cup \{0\}} f_{ij}^t = \sum_{j \in N \cup \{0\}} f_{ji}^t - y_i^t \quad \forall i \in N, \forall t \in T, \quad (3.36)$$

$$f_{ij}^t \leq nx_{ij}^t \quad \forall (i, j) \in A, \forall t \in T, \quad (3.37)$$

$$f_{ij}^t \geq 0 \quad \forall (i, j) \in A, \forall t \in T \quad (3.38)$$

Os conjuntos de restrições (3.35)-(3.37) estão associadas ao fluxo de cada rota, reforçando a existência de um único circuito conexo. O primeiro conjunto de restrições (3.35) assegura que o fluxo inicial de cada rota é igual ao número total de clientes a serem visitados (excluindo o nodo do fornecedor). O segundo conjunto de restrições (3.36) garante a diminuição de uma unidade de fluxo sempre que passa pelo cliente a ser visitado, na respetiva rota (excluindo o arco de retorno para o fornecedor). O conjunto de restrições (3.37) garante a passagem de fluxo num arco caso este pertença à rota da solução. Por fim, o conjunto de restrições (3.38) definem o domínio das variáveis.

### 3.3.2 Modelo MTZ

Em alternativa ao modelo apresentado anteriormente e de forma a eliminar os subcircuitos que não incluam o fornecedor, propõe-se o modelo MTZ onde serão utilizadas as variáveis de decisão  $w_i^t, \forall i \in N$ . Note-se que os modelos são similares à exceção na forma como se impedem os subcircuitos. Assim, no modelo MTZ as variáveis de decisão indicam a ordem pela qual os clientes são visitados nas rota de cada período, definindo para cada vértice  $j$  no período  $t$ , o número total de clientes já visitados pela rota do período  $t$  e após a visita a esse cliente. Desta forma, para a formulação do modelo MTZ basta apenas retirar as restrições genéricas (3.12) e (3.29) dos modelos base e adicionar as seguintes restrições:

$$w_o^t = 0 \quad \forall i \in T, \quad (3.39)$$

$$w_j^t \geq w_i^t + 1 - (\#N - 1)(1 - x_{ij}^t) \quad \forall t \in T, \forall (i, j) \in A, \forall i \in V, \forall j \in N \quad (3.40)$$

$$w_i^t \geq 0 \quad \forall i \in N, \forall t \in T \quad (3.41)$$

As restrições (3.39) garantem para cada instante  $t$  que o fluxo é inicializado no vértice do fornecedor. O conjunto de restrições (3.40) diz respeito ao aumento de uma unidade de fluxo sempre que passam pelo vértice do cliente a ser visitado, ou seja, caso o vértice  $j$  ocorra imediatamente a seguir ao vértice  $i$ , é incrementado uma unidade na variável  $w_j^t$  de forma a contabilizar os clientes visitados naquela rota e evitar a ocorrência de sub circuitos. Por outro lado, como as variáveis  $w_i^t$  tomam apenas valores positivos (3.41), então a restrição (3.40) anulam os clientes que não pertencem à rota.

## 3.4 Melhoramento dos modelos propostos

Nesta secção serão apresentados alguns aspetos importantes acerca dos modelos propostos anteriormente.

Um dos objetivos para os modelos propostos nesta dissertação é resolver o problema de forma eficiente. Para tal, procurou-se identificar simetrias nos modelos com intuito de proceder à sua eliminação mediante a introdução de novas restrições e tentando dessa forma resolver os modelos em menos tempo de CPU. Outro modo de obter eficiência passa por reforçar o limite inferior fornecido pela relaxação linear mediante a introdução de desigualdades válidas. Estas, são restrições que permitem eliminar soluções não inteiras mantendo as soluções inteiras.

Desta forma, decidiu-se melhorar o conjunto de restrições (3.7) e (3.24) dos modelos base MB-PML e MB-POU, respetivamente, com o objetivo de estudar o impacto nas soluções das relaxações lineares e no seu tempo de execução. Ainda assim, esta nova desigualdade válida também é aplicada nos modelos de eliminação de subcircuitos Fluxos e MTZ, onde passaram a ser designados por FluxosY e MTZ-Y. As desigualdades válidas que irão substituir as restrições já mencionadas são do seguinte tipo:

$$\sum_{i \in N} q_i^t \leq Qy_0^t \quad \forall t \in T, \quad (3.42)$$

Estas desigualdades (3.42) pretendem assim reforçar que, não será enviado inventário a qualquer cliente caso não haja rota ( $y_0^t = 0$ ) nesse instante  $t$ . Ao implementar estas desigualdades válidas, pretende-se que os modelos melhorem na pesquisa de soluções, através dos cortes na região admissível do problema.

A matriz de custo associada ao transporte de inventário do fornecedor para os seus clientes pode ser considerada simétrica ( $c_{ij} = c_{ji}$ ) ou assimétrica ( $c_{ij} \neq c_{ji}$ ). No entanto, nesta dissertação apenas serão consideradas matrizes de custo simétricas.

Para as matrizes de custo simétricas e quando um grafo é completo, os modelos apresentados podem gerar várias soluções ótimas, mas com simetria nas rotas de distribuição de inventário para os clientes no mesmo instante  $t$  como está exemplificado na figura 3.1.

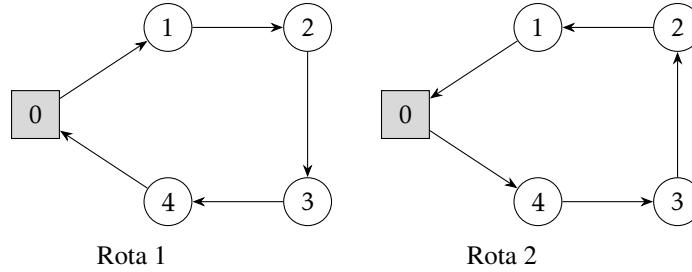


Figura 3.1: Representação de duas soluções admissíveis correspondentes a duas rotas simétricas num determinado instante  $t$ .

Com esta simetria de rotas, a árvore de pesquisa torna-se mais densa provocando um maior tempo de execução até encontrar a solução ótima. De forma a evitar possíveis simetrias nas rotas, será adicionada a seguinte restrição nos quatro modelos apresentados nesta dissertação, onde passaram a ser designados por FluxosY-QS e MTZ-Y-QS.

$$\sum_{j=1}^{m-1} x_{0j}^t \geq x_{m0}^t \quad \forall t \in T, \forall m = 2, \dots, n \quad (3.43)$$

Para este conjunto de restrições (3.43), serão consideradas apenas as ligações iniciais (fornecedor, cliente) e finais (cliente, fornecedor) de cada rota no instante  $t$  de forma a quebrar as rotas simétricas. Como as rotas são simétricas, o objetivo deste conjunto de restrições é escolher a rota ótima em que o primeiro cliente a ser visitado tenha menor índice que o último cliente a ser visitado. Assim, seguindo o exemplo da figura 3.1, pode-se observar na Rota 1 que  $x_{40}^t = 1$  e  $x_{01}^t = 1$ , então  $x_{01}^t + x_{02}^t + x_{03}^t = 1 \geq x_{40}^t$ , satisfazendo assim o conjunto de restrições (3.43). Relativamente à rota 2 o mesmo não se verifica, pois o último cliente a ser visitado ( $x_{10}^t = 1$ ) tem um menor índice que o primeiro cliente ( $x_{04}^t = 1$ ). Para esta rota o conjunto de restrições não fica satisfeito, logo a rota 1 será a rota escolhida para solução admissível ou até possível solução ótima do problema.

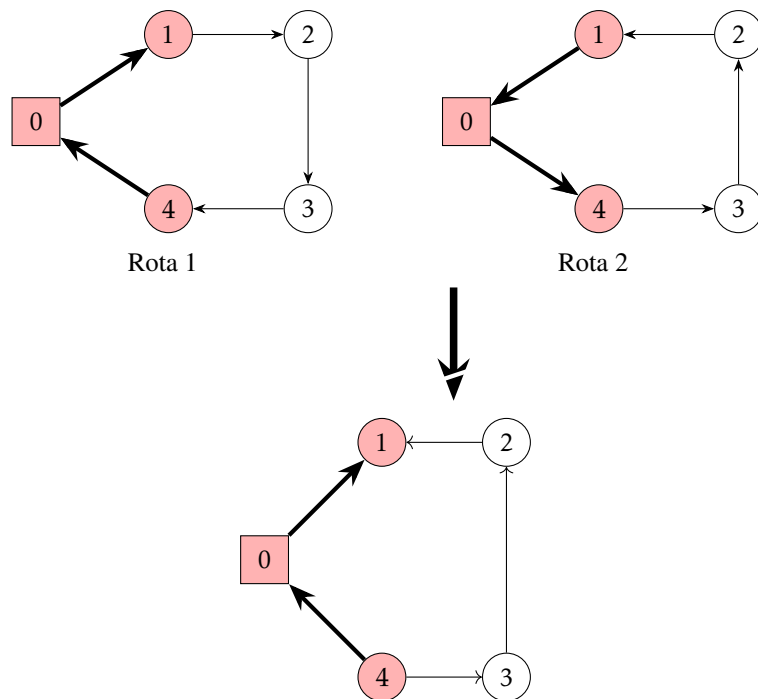


Figura 3.2: Representação de duas soluções admissíveis de rotas simétricas num determinado instante  $t$ .

### 3.5 Exemplo de aplicação

De forma a ter uma melhor compreensão acerca das políticas de reabastecimento ML e OU descritas anteriormente, é apresentado um exemplo de aplicação com base numa instância de pequena dimensão.

Considere-se o fornecedor e 4 clientes representados por  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ , respetivamente. O vetor  $r$  representa a produção de inventário por parte do fornecedor e a procura de cada cliente. Para o vetor  $I_0$  estão representados os níveis de inventário do fornecedor e respetivos clientes no início do horizonte temporal. No vetor  $C$  estão representados os níveis máximos de inventário para cada cliente. No vetor  $h$  estão representados os custos de armazenamento para o fornecedor e respetivos clientes. A matriz  $c$  representa os custos de deslocação de inventário, onde a primeira linha/coluna são correspondentes ao fornecedor e as restantes linhas/colunas aos clientes. Por fim, o horizonte temporal é  $H = 3$ .

$$r = [7500, 1000, 3000, 2000, 1500]$$

$$I_0 = [13500, 2000, 3000, 3000, 1500]$$

$$C = [5000, 3000, 3000, 4000]$$

$$h = [0.20, 0.40, 0.35, 0.25, 0.40]$$

$$c = \begin{bmatrix} - & 100 & 100 & 100 & 100 \\ 100 & - & 10 & 145 & 180 \\ 100 & 10 & - & 140 & 145 \\ 100 & 145 & 140 & - & 10 \\ 100 & 180 & 145 & 10 & - \end{bmatrix}$$

A instância foi resolvida utilizando os modelos sob a política ML e sob a política OU. Nas figuras abaixo encontram-se as soluções obtidas através das rotas e respectivas quantidades de inventário a enviar para ambos os modelos.

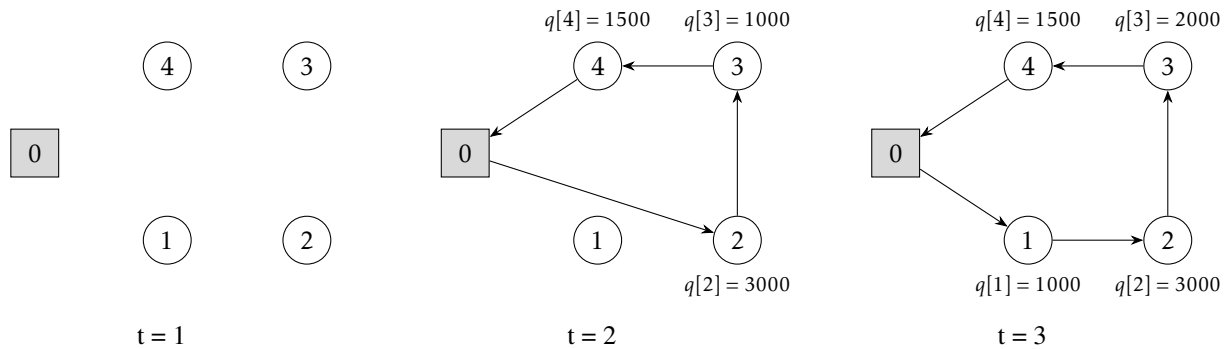


Figura 3.3: Representação das rotas e quantidade de inventário a enviar a cada cliente sob a política ML na solução ótima.

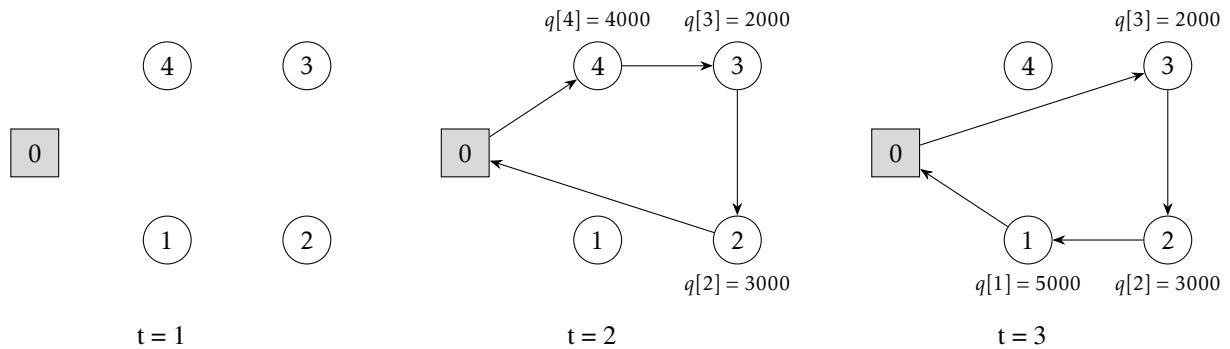


Figura 3.4: Representação das rotas e quantidade de inventário a enviar a cada cliente sob a política OU na solução ótima.

Na figura 3.3, o valor da solução obtida é 12360 u.m.. Como se pode observar para  $t = 1$  não se entrega produto, o que já era de prever, visto que todos os clientes têm inventário inicial armazenado suficiente para satisfazer as suas procuras pelo menos nesse período. Relativamente aos restantes períodos, observe-se que o fornecedor apenas enviou a quantidade suficiente de inventário de forma a satisfazer a procura dos seus clientes.

Na figura 3.4, o valor da solução obtida é 13950 u.m.. Para  $t = 1$  verifica-se a mesma situação ocorrida no modelo sob a política ML e pelos motivos referidos anteriormente. No total dos dois últimos períodos ( $t = 2, t = 3$ ) verifica-se uma redução de clientes visitados, contudo um aumento no valor da solução. O aumento do valor na solução está diretamente relacionado com a condição imposta na política de reabastecimento OU, onde se pretende encher o armazém na sua totalidade sempre que um cliente é visitado.



## Capítulo 4

# Resultados computacionais

Neste capítulo apresenta-se a experiência computacional realizada para comparar os modelos e políticas apresentados no capítulo anterior. Primeiramente serão descritas as instâncias de teste utilizadas nesta dissertação. De seguida, e para cada instância e para cada política, serão apresentados os resultados obtidos por cada um dos modelos considerados e pelas respectivas relaxações lineares. Por fim, com base nos valores obtidos, será feita uma análise comparativa das políticas de reabastecimento dos modelos propostos.

Para a implementação dos modelos foi utilizado o *software IBM ILOG CPLEX Optimization Studio OPL V12.9* num computador com o processador Intel(R) Core(TM) i5-4590 CPU @ 3.30GHz e com 8.00GB de memória RAM.

### 4.1 Instâncias de teste

Para testar os modelos propostos nesta dissertação foram utilizadas apenas as instâncias *Instances\_highcost\_H3* de Archetti et al. apresentadas em [3] e podem ser consultadas em [1]. Este conjunto de instâncias foi gerado para o problema da gestão integrada de rotas e inventário para um produto, onde foi apenas considerado um horizonte temporal de 3 dias,  $H = 3$ .

Nesta dissertação, e para cada instância, consideraram-se ainda os casos de  $H = 6$  e  $H = 10$  a fim de estudar o efeito do alargamento do horizonte temporal no comportamento dos modelos.

De seguida será explicada de forma mais detalhada como foram geradas as instâncias de Archetti et al. utilizadas nesta dissertação.

- Para o horizonte temporal  $H = 3$ ,  $H = 6$  e  $H = 10$  foram geradas instâncias considerando um número de clientes  $n = 5k$ , onde  $k = 1, 2, \dots, 10$ .

Para cada instância os restantes parâmetros foram gerados do seguinte modo:

- A quantidade de inventário,  $r_i^t, \forall i \in N$ , que cada cliente gasta no dia  $t$  do horizonte temporal é constante ( $r_i^t = r_t, t \in H$ ) e foi gerada como número inteiro no intervalo  $[10, 100]$ ;
- A quantidade de inventário,  $r_0^t$ , produzida pelo fornecedor no dia  $t$  do horizonte temporal é  $\sum_{i \in N} r_i$ ;
- O nível máximo de inventário que cada cliente pode armazenar é dado por  $C_i = r_i g_i, \forall i \in N$ , onde  $g_i$ , o número de vezes necessárias para consumir a quantidade de inventário até atingir a sua

capacidade máxima  $C_i$ , é escolhido aleatoriamente no conjunto  $\{2, 3\}$ . (Por exemplo, se  $r_1 = 65$  e  $g_1 = 3$ , então a capacidade máxima de armazenamento no cliente 1 é de  $65 \times 3 = 195$ );

- O nível máximo de inventário inicial disponibilizado pelo fornecedor é dado por  $\sum_{i \in N} I_i$ ;
- Cada cliente começa o horizonte temporal com  $C_i - r_i$  unidades do produto armazenadas;
- O custo de armazenamento nos clientes,  $h_i$ , foi gerado aleatoriamente no intervalo  $[0.1, 0.5]$ , enquanto que para o fornecedor, o custo de armazenamento  $h_0$  é 0.3;
- A capacidade de transporte é dada por  $C = \frac{3}{2} \sum_{i \in N} r_i$ ;
- O custo de transporte entre o local de  $i$  e o local de  $j$ ,  $c_{ij}$ , é calculado usando a seguinte formula:  $\left\lceil \sqrt{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2} \right\rceil$ , onde cada coordenada  $(X_i, Y_i)$  e  $(X_j, Y_j)$  é gerada aleatoriamente considerando uma distribuição uniforme num intervalo  $[0; 500]$ , obtendo-se assim uma matriz de custos simétrica;

## 4.2 Resultados computacionais

Para realçar a dificuldade na resolução do problema em estudo e motivar a escolha de alguns testes computacionais que serão apresentados posteriormente neste capítulo, é importante ter em consideração a dimensão do problema resolvido por cada modelo sob as variantes e para cada conjunto de instâncias.

Apresenta-se assim na tabela 4.1 o número de variáveis e restrições fornecidos pelo *software IBM ILOG CPLEX Optimization Studio OPL V12.9* tanto para a política de reabastecimento ML como para a política de reabastecimento OU para os modelos considerados. Como se esperava, os modelos originais (Fluxos e MTZ) e as respetivas variantes Y (FluxosY e MTZ-Y) têm as mesmas dimensões, visto que apenas foi alterada uma restrição sem aumentar o número de variáveis. Assim, são apenas apresentados os números de variáveis e restrições referentes aos modelos Fluxos e MTZ.

Para os modelos FluxosY-QS e MTZ-Y-QS em ambas as políticas de reabastecimento, decidiu-se reduzir o número de instâncias a testar para um subconjunto restrito com  $n$  clientes, sendo  $n = 10, 20, 30, 40$  e  $50$ .

Quando se aumenta o número de clientes, naturalmente a dimensão dos problemas a resolver em cada modelo também aumenta. Para uma dada instância, o problema a ser resolvido pelos modelos MTZ e suas variantes (MTZ-Y e MTZ-Y-QS) sob as políticas de reabastecimento ML e OU apresentam um menor número de variáveis e restrições comparativamente aos modelos Fluxos e suas variantes (FluxosY e FluxosY-QS) sob as mesmas políticas de reabastecimento. Essa diferença de dimensões entre os modelos é mais acentuada para o número de variáveis usadas na resolução do problema em questão.

Note-se que as células assinaladas com (\*\*) correspondem aos conjuntos de instâncias para as quais não foi possível determinar a solução ótima do problema por a máquina utilizada na sua resolução não ter memória suficiente.

Tabela 4.1: Comparação dos modelos relativamente ao número de variáveis e restrições.

H=3								
Política ML								
	Fluxos		MTZ		FluxosY-QS		MTZ-Y-QS	
n	Restrições	Variáveis	Restrições	Variáveis	Restrições	Variáveis	Restrições	Variáveis
5	226	231	196	159				
10	586	756	526	459	613	756	553	459
15	1096	1581	909	1006				
20	1756	2706	1636	1509	1813	2706	1693	1509
25	2566	4131	2416	2259				
30	3526	5856	3346	3159	3613	5856	3433	3159
35	4636	7881	4426	4209				
40	5896	10206	5656	5409	5896	10206	5773	5409
45	7306	12831	7036	6759				
50	8866	15756	8566	8259	9013	15756	8713	8259
Política OU								
	Fluxos		MTZ		FluxosY-QS		MTZ-Y-QS	
n	Restrições	Variáveis	Restrições	Variáveis	Restrições	Variáveis	Restrições	Variáveis
5	240	231	210	159				
10	615	756	555	459	642	756	582	459
15	1140	1581	1110	1006				
20	1815	2706	1695	1509	1815	2706	1752	1509
25	2640	4131	2490	2259				
30	3615	5856	3435	3159	7404	5856	3522	3159
35	4740	7881	4530	4209				
40	6015	10206	5775	5409	6132	10206	5892	5409
45	7440	12831	7170	6759				
50	9015	15756	8715	8259	9162	15756	8862	8259
H=6								
Política ML								
	Fluxos		MTZ		FluxosY-QS		MTZ-Y-QS	
n	Restrições	Variáveis	Restrições	Variáveis	Restrições	Variáveis	Restrições	Variáveis
5	451	462	391	318				
10	1171	1512	1051	918	1225	1512	1164	918
15	2191	3162	1818	2011				
20	3511	5412	3271	3018	3625	5412	3385	3018
25	5131	8262	4831	4518				
30	7051	11712	6691	6318	7225	11712	6865	6318
35	9271	15762	8851	8418				
40	**	**	**	**	**	**	**	**
45	**	**	**	**	**	**	**	**
50	**	**	**	**	**	**	**	**
Política OU								
	Fluxos		MTZ		FluxosY-QS		MTZ-Y-QS	
n	Restrições	Variáveis	Restrições	Variáveis	Restrições	Variáveis	Restrições	Variáveis
5	480	462	420	318				
10	1230	1512	1110	918	1284	1512	1164	918
15	2280	3162	2100	1818				
20	3630	5412	3390	3018	3744	5412	3504	3018
25	5280	8262	4980	4518				
30	7230	11712	6870	6318	7404	11712	7044	6318
35	9271	15762	9060	8418				
40	**	**	**	**	**	**	**	**
45	**	**	**	**	**	**	**	**
50	**	**	**	**	**	**	**	**
H=10								
Política ML								
	Fluxos		MTZ		FluxosY-QS		MTZ-Y-QS	
n	Restrições	Variáveis	Restrições	Variáveis	Restrições	Variáveis	Restrições	Variáveis
5	751	770	651	530				
10	1951	2520	1751	1530	2041	2520	1841	1530
15	3651	5270	3351	3030				
20	5851	9020	5451	5030	6041	9020	5641	5030
25	8551	13770	8051	7530				
30	**	**	**	**	**	**	**	**
35	**	**	**	**				
40	**	**	**	**	**	**	**	**
45	**	**	**	**				
50	**	**	**	**	**	**	**	**
Política OU								
	Fluxos		MTZ		FluxosY-QS		MTZ-Y-QS	
n	Restrições	Variáveis	Restrições	Variáveis	Restrições	Variáveis	Restrições	Variáveis
5	800	770	700	530				
10	2050	2520	1850	1530	2140	2520	1940	1530
15	3800	5270	3500	3030				
20	6050	9020	5650	5030	6240	9020	5840	5030
25	**	**	**	**				
30	**	**	**	**	**	**	**	**
35	**	**	**	**				
40	**	**	**	**	**	**	**	**
45	**	**	**	**				
50	**	**	**	**	**	**	**	**

### 4.2.1 Qualidade da Relaxação Linear

Nesta dissertação estamos perante um problema de minimização, onde sabemos que o valor da respetiva relaxação linear fornece um limite inferior para o valor ótimo, enquanto o valor de qualquer solução admissível fornece um limite superior.

A relaxação linear de um dado modelo tem uma formulação semelhante à do problema original, onde as restrições de domínio das variáveis são relaxadas, ou seja, as variáveis inteiras passam a tomar valores reais. É interessante estudar as relaxações lineares dos modelos propostos e compará-las quer do ponto de vista da qualidade do limite inferior quer no ponto de vista do tempo de CPU necessário para os obter.

Desta forma, para estudar a qualidade dos limites inferiores, é tido em conta a medida de desempenho Gap.

$$Gap = \frac{V_{PI} - V_{RL}}{V_{PI}}$$

Esta medida de desempenho, permite-nos saber o desvio relativo do limite inferior,  $V_{RL}$ , do valor da solução ótima,  $V_{PI}$ . Em geral, espera-se que um modelo com valor de Gap mais pequeno seja mais eficiente do que outro que apresente um desvio maior porque se espera que a respetiva árvore de pesquisa associada à resolução do modelo seja menor.

Na tabela 4.2, encontram-se os tempos médios de computação necessários para a obtenção da relaxação linear, bem como o respetivo valor do Gap dos modelos Fluxos e MTZ sob as políticas ML e OU.

Tabela 4.2: Resultados médios obtidos pelas relaxações lineares dos modelos Fluxo e MTZ sob as políticas ML e OU e respetivo CPU (segundos).

política ML												
n	H=3				H=6				H=10			
	Fluxos		MTZ		Fluxos		MTZ		Fluxos		MTZ	
	%Gap	CPU	%Gap	CPU	%Gap	CPU	%Gap	CPU	%Gap	CPU	%Gap	CPU
5	27,91%	0,01	30,38%	0,01	24,99%	0,01	27,68%	0,01	22,70%	0,01	25,46%	0,01
10	19,54%	0,01	22,77%	0,00	20,25%	0,02	23,93%	0,03	19,15%	0,05	22,92%	0,01
15	18,53%	0,03	21,39%	0,00	19,94%	0,08	23,08%	0,01	19,09%	0,16	22,31%	0,03
20	17,93%	0,05	18,67%	0,01	20,19%	0,14	21,86%	0,01	19,56%	0,26	21,37%	0,03
25	15,29%	0,11	17,43%	0,01	17,39%	0,24	19,85%	0,03	**	**	**	**
30	13,45%	0,15	14,79%	0,04	14,58%	0,31	16,12%	0,05	**	**	**	**
35	13,24%	0,21	14,75%	0,03	16,13%	0,47	17,74%	0,05	**	**	**	**
40	13,56%	0,26	14,75%	0,04	**	**	**	**	**	**	**	**
45	11,78%	0,32	12,77%	0,03	**	**	**	**	**	**	**	**
50	11,87%	0,43	13,17%	0,05	**	**	**	**	**	**	**	**
política OU												
n	H=3				H=6				H=10			
	Fluxos		MTZ		Fluxos		MTZ		Fluxos		MTZ	
	%Gap	CPU	%Gap	CPU	%Gap	CPU	%Gap	CPU	%Gap	CPU	%Gap	CPU
5	33,03%	0,04	35,33%	0,00	27,81%	0,00	30,38%	0,00	24,82%	0,01	27,48%	0,01
10	26,71%	0,01	29,67%	0,01	23,64%	0,03	26,50%	0,01	20,86%	0,05	24,52%	0,01
15	23,52%	0,03	26,17%	0,00	21,24%	0,08	24,30%	0,00	20,12%	0,16	23,27%	0,03
20	21,06%	0,05	22,48%	0,07	21,42%	0,16	23,08%	0,03	20,44%	0,31	22,20%	0,03
25	20,40%	0,12	22,40%	0,01	18,63%	0,25	17,52%	0,03	**	**	**	**
30	17,21%	0,15	18,48%	0,02	15,55%	0,32	20,06%	0,04	**	**	**	**
35	16,96%	0,21	18,39%	0,02	16,01%	0,45	17,64%	0,05	**	**	**	**
40	17,38%	0,27	18,51%	0,03	**	**	**	**	**	**	**	**
45	15,23%	0,30	16,17%	0,04	**	**	**	**	**	**	**	**
50	15,65%	0,43	16,88%	0,04	**	**	**	**	**	**	**	**

Analisando inicialmente o comportamento do modelo Fluxos, observa-se para o horizonte temporal com  $H=3$  e para ambas as políticas de reabastecimento que aumentando o número de clientes o valor do Gap médio diminui gradualmente. No entanto, a política ML apresenta melhores valores de Gap comparativamente à política OU, isto é, tem uma menor diferença entre o valor da relaxação linear e o valor ótimo da solução.

Com o aumento do horizonte temporal para  $H=6$ , observa-se na política ML, tanto nos valores médios de Gap como nos tempos médios de CPU, um ligeiro aumento em relação ao observado em  $H=3$ . Em relação à política OU, apresentou melhores valores médios de Gap e tempos médios de CPU relativamente ao obtido em  $H=3$ . Quando o horizonte passa de  $H=6$  para  $H=10$ , é verificada uma redução nos valores médios de Gap em ambas as políticas de reabastecimento, tendo em conta o aumento dos clientes.

Para as células assinaladas a (\*\*) não foi possível apresentar os valores do Gap médio e os respetivos tempos médios de CPU devido à incapacidade do computador, ou seja, falta de memória para conseguir resolver o modelo em questão.

No modelo MTZ é verificado o mesmo comportamento ocorrido no modelo Fluxos, onde ambas as políticas apresentam uma diminuição dos valores do Gap médio, quer pelo aumento do número de clientes, quer pelo alargamento do horizonte temporal. Deste modo, observa-se para a política ML menores valores de Gap em relação à política OU. Referir ainda que dado o aumento do número de clientes e do horizonte temporal, ambas as políticas apresentam valores muito semelhantes de tempos médios de CPU necessários para a sua resolução.

Analisando os dois modelos na globalidade, conclui-se que com aumento do número de clientes e do horizonte temporal, o modelo MTZ sob as duas políticas de reabastecimento apresenta maiores valores de Gap médio comparativamente aos do modelo Fluxos, mesmo que para cada instância do problema o modelo MTZ apresente um menor número de variáveis e restrições.

Para o tempo médio de CPU necessário, o modelo MTZ consegue encontrar o valor da relaxação linear em menos tempo comparativamente ao modelo Fluxos, sendo que essa diferença começa a ser notória com o aumento do número de clientes. Este resultado era expetável devido ao modelo MTZ apresentar uma menor dimensão no número de variáveis e restrições, comparativamente ao modelo Fluxos.

Na secção 3.4 do capítulo 3, foi explicado que um dos objectivos propostos nesta dissertação passa por resolver o problema de forma mais eficiente possível, tentando melhorar os tempos de execução dos modelos propostos. Para tal, a restrição estabelecida para que a entrega de inventário não exceda a capacidade máxima do veículo,  $\sum_{i \in N} q_i^t \leq Q, t \in T$  foi fortalecida e substituída pela desigualdade válida,  $\sum_{i \in N} q_i^t \leq Qy_0^t, t \in T$ , nos modelos Fluxos e MTZ, designando-se agora por FluxosY e MTZ-Y respetivamente. Desta forma pretende-se eliminar, em cada modelo, soluções fracionárias que seriam consideradas admissíveis na respetiva relaxação linear, tornando assim os modelos mais eficientes.

Na tabela 4.3 encontram-se os valores dos Gaps médios e os tempos de computação médios para modelos FluxosY e MTZ-Y, sob as duas políticas de reabastecimento ML e OU, obtidos para cada conjunto de instâncias com igual número de clientes.

Tabela 4.3: Resultados médios obtidos pelas relaxações lineares dos modelos FluxoY e MTZ-Y sob as políticas ML e OU e respetivo CPU (segundos).

política ML												
n	H=3				H=6				H=10			
	FluxosY		MTZ-Y		FluxosY		MTZ-Y		FluxosY		MTZ-Y	
	%Gap	CPU	%Gap	CPU	%Gap	CPU	%Gap	CPU	%Gap	CPU	%Gap	CPU
5	25,70%	0,00	26,93%	0,00	22,54%	0,00	23,92%	0,00	20,11%	0,01	21,43%	0,00
10	18,24%	0,01	20,33%	0,00	18,52%	0,02	20,79%	0,02	17,24%	0,04	19,44%	0,02
15	17,76%	0,02	19,38%	0,00	19,06%	0,08	20,86%	0,01	18,16%	0,15	19,98%	0,01
20	16,02%	0,05	18,01%	0,01	18,72%	0,15	20,94%	0,02	18,05%	0,27	20,38%	0,05
25	14,68%	0,11	15,93%	0,01	16,55%	0,24	17,95%	0,04	**	**	**	**
30	13,23%	0,15	14,21%	0,02	14,27%	0,30	15,37%	0,06	**	**	**	**
35	12,96%	0,21	14,22%	0,03	15,81%	0,38	17,30%	0,06	**	**	**	**
40	13,37%	0,26	13,76%	0,04	**	**	**	**	**	**	**	**
45	11,65%	0,30	12,53%	0,05	**	**	**	**	**	**	**	**
50	11,59%	0,47	12,20%	0,07	**	**	**	**	**	**	**	**
política OU												
n	H=3				H=6				H=10			
	FluxosY		MTZ-Y		FluxosY		MTZ-Y		FluxosY		MTZ-Y	
	%Gap	CPU	%Gap	CPU	%Gap	CPU	%Gap	CPU	%Gap	CPU	%Gap	CPU
5	30,99%	0,03	32,06%	0,01	25,48%	0,01	26,74%	0,00	22,31%	0,00	23,53%	0,00
10	25,51%	0,01	27,40%	0,00	21,29%	0,02	23,45%	0,01	18,99%	0,05	21,11%	0,02
15	22,79%	0,03	24,28%	0,01	20,36%	0,09	22,06%	0,02	19,19%	0,15	20,88%	0,01
20	20,01%	0,05	21,88%	0,01	20,08%	0,18	22,23%	0,03	19,03%	0,29	21,30%	0,05
25	19,83%	0,12	20,97%	0,02	17,81%	0,23	19,16%	0,04	**	**	**	**
30	17,00%	0,15	17,72%	0,03	15,22%	0,31	19,32%	0,06	**	**	**	**
35	16,68%	0,21	17,39%	0,06	15,56%	0,37	16,65%	0,06	**	**	**	**
40	17,20%	0,25	18,11%	0,03	**	**	**	**	**	**	**	**
45	15,10%	0,28	15,90%	0,04	**	**	**	**	**	**	**	**
50	15,58%	0,42	16,20%	0,06	**	**	**	**	**	**	**	**

Nos novos modelos FluxosY e MTZ-Y verifica-se o mesmo comportamento ocorrido nos modelos anteriores, tanto para os valores do Gap médio como para os tempos médios de CPU. Assim, dado o horizonte temporal H=3, o modelo FluxosY sob a política ML consegue obter em média melhores valores de Gap do que a política OU, ou seja, apresenta uma menor diferença entre o valor da relaxação linear e o valor ótimo referente a cada instância resolvida. Além disso para ambas as políticas o valor médio do Gap diminui quando o número de clientes aumenta e o tempo médio de CPU aumenta ligeiramente. De referir ainda que à medida que o número de clientes aumenta, os tempos médios de CPU necessários para a obtenção dos limites inferiores das duas políticas de reabastecimento são praticamente idênticos.

Quando o horizonte temporal passa para H=6 e para H=10, o mesmo é verificado, ou seja, ambas as

políticas apresentam uma diminuição gradual dos valores de Gap médios dado o aumento no número de clientes, sendo que a política ML continua a obter melhores limites inferiores. Em relação aos tempos médios de computação, é verificado novamente tempos semelhantes para as duas políticas. Observou-se novamente para a política ML o que já tinha ocorrido para a mesma política recorrendo ao modelo Fluxos, isto é, quando o horizonte passa de  $H=3$  para  $H=6$ , observou-se um ligeiro aumento médio dos valores de Gap. No entanto, quando o horizonte temporal passa de  $H=6$  para  $H=10$ , verifica-se novamente uma diminuição dos valores médios de Gap.

No modelo MTZ-Y é verificado novamente o mesmo comportamento nos valores médios de Gap e nos tempos médios de CPU ocorridos no modelo FluxosY, dado o aumento do número de clientes e o horizonte temporal. Assim, ao analisar o modelo MTZ-Y na sua globalidade, é possível observar que ambas as políticas têm em média uma diminuição gradual nos valores médios do Gap (exceto em  $H=6$  sob a política ML, onde se verificou um aumento nos valores médios de Gap, tendo em conta o aumento do número de clientes), sendo que a política ML obtém melhores limites inferiores. Para o tempo médio de CPU necessário para a obtenção do limite inferior, ambas as políticas apresentam tempos idênticos, conforme o aumento do número de Clientes e do alargamento no horizonte temporal.

Comparando os dois modelos, observa-se que, quer no aumento do número de clientes, quer no aumento do horizonte temporal, o modelo FluxosY consegue obter melhores limites inferiores (menores valores médios de Gap) indicando assim uma possível maior eficiência para a resolução do modelo. No entanto, quando se observa o tempo médio de computação necessário para obter a relaxação linear, o modelo FluxosY tende a apresentar piores tempos de CPU sempre que é considerado o aumento do número de clientes e do horizonte temporal. Esta diferença de tempos médios de CPU era de esperar, tendo em conta que o modelo FluxosY apresenta um maior número de restrições e variáveis comparativamente ao modelo MTZ-Y, como se pode observar na tabela 4.1.

De forma a ter uma melhor noção da evolução dos valores do Gap médio com a introdução da desigualdade válida nos modelos Fluxos e MTZ, construiu-se os seguintes gráficos com base nos resultados obtidos nas tabelas 4.2 e 4.3.

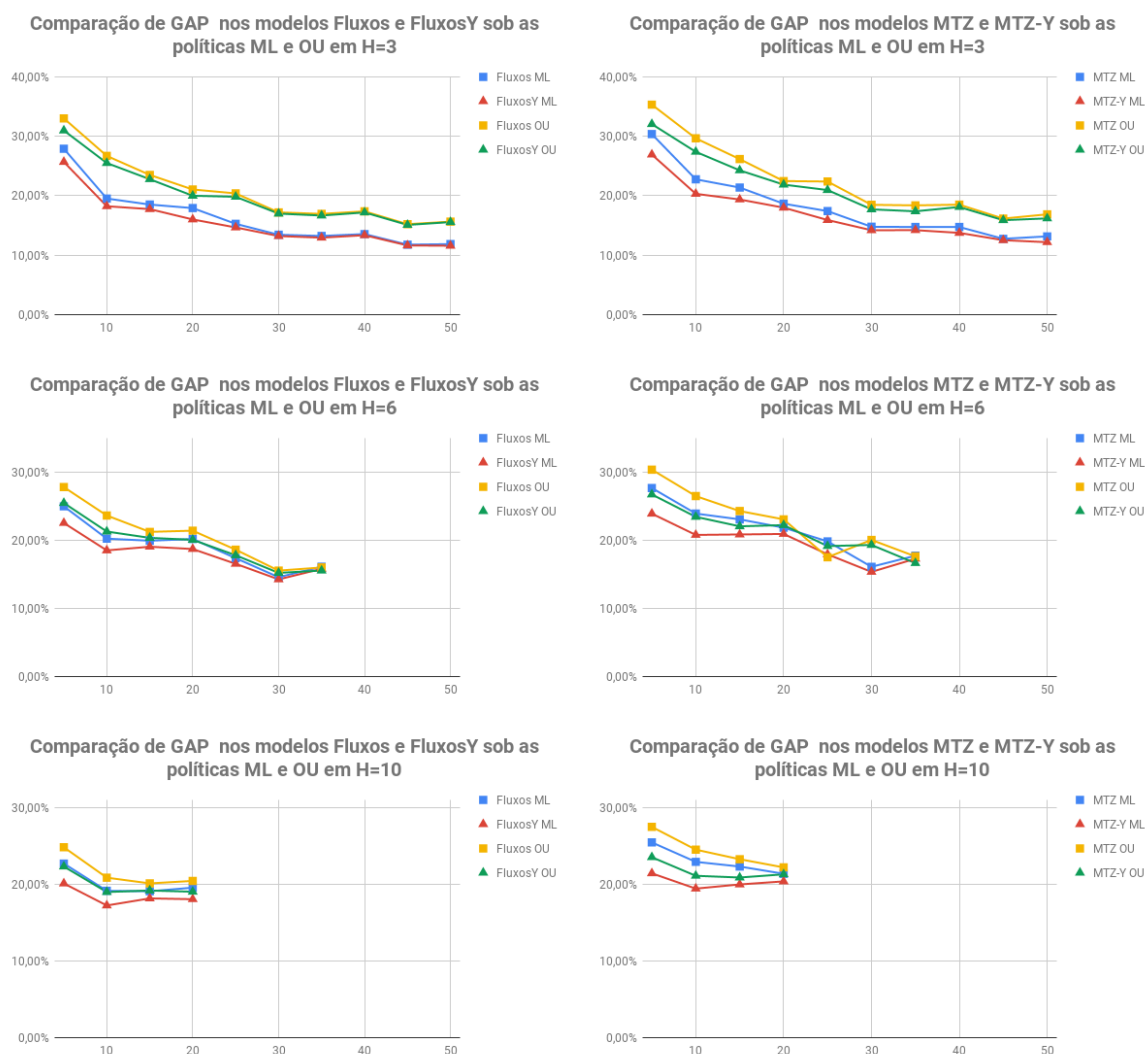


Figura 4.1: Comparação dos Gap para os modelos Fluxos, FluxosY, MTZ e MTZ-Y e respectivas políticas ML e OU.

Na figura 4.1 pode observar-se para um horizonte com  $H=3$  e considerando apenas os conjuntos de instâncias com poucos clientes que, o modelo FluxosY sob as duas políticas de reabastecimento consegue obter em média melhores valores de Gap em relação ao modelo Fluxos. Todavia, com o aumentar do número de clientes, os valores médios de Gap para ambos os modelos sob as duas políticas tendem a aproximar-se, acabando por apresentar resultados muito semelhantes em cada política nos últimos conjuntos de instâncias.

Ao aumentarmos o horizonte para  $H=6$ , verifica-se o mesmo comportamento ocorrido em  $H=3$ , ou seja, o modelo FluxosY sob as duas políticas começa por obter melhores valores médios de Gap para os conjuntos de instâncias iniciais. Contudo, conforme se aumenta o número de clientes nos respetivos conjuntos de instâncias, os valores médios de Gap nos modelos Fluxos e FluxosY sob as duas políticas tornam-se muito idênticos como é visível no gráfico.

Quando estamos perante um horizonte temporal com  $H=10$  e analisando o aumento do número de clientes, o modelo FluxosY sob as duas políticas apresenta melhores valores de Gap médio em relação ao modelo Fluxos sob as mesmas políticas.



Na comparação dos modelos MTZ e MTZ-Y, observa-se o mesmo comportamento descrito na comparação dos modelos anteriores. Onde o modelo MTZ-Y apresenta melhores valores médios de Gap para ambas as políticas de reabastecimento, porém, obtém tempos médios de CPU semelhante aos do modelo MTZ sob as políticas de reabastecimento ML e OU. Destacar ainda que ambas as políticas do modelo MTZ-Y conseguem menores valores de Gap médio em relação à melhor política (ML) do modelo MTZ, onde obteve os menores valores de Gap.

Analisando na sua globalidade os modelos utilizados para a construção dos gráficos da figura acima, pode concluir-se que o modelo FluxosY consegue obter os menores valores médios de Gap sob as políticas ML e OU, isto é, apresenta uma menor diferença entre o valor da relaxação linear e o valor ótimo da solução.

Recorrendo às tabelas já mencionadas para a construção dos gráficos, pode-se observar que os modelos MTZ e MTZ-Y são os modelos que conseguem obter a relaxação linear num menor tempo médio de computação. Porém, como foi explicado anteriormente o modelo MTZ-Y tem a vantagem de conseguir obter menores valores de Gap em relação ao modelo MTZ.

Na secção 3.4 do capítulo 3, foi explicado que os modelos propostos (Fluxos, FluxosY, MTZ e MTZ-Y) apresentavam simetrias nas suas rotas e no sentido de as quebrar foi proposto acrescentar a restrição (3.43), eliminando assim algumas possíveis soluções simétricas.

Como um dos objectivos para esta dissertação é comparar os modelos propostos e escolher o que consegue resolver o problema em menos tempo de CPU. Então, optou-se por continuar o estudo computacional com os modelos FluxosY e MTZ-Y para os quais as respectivas relaxações lineares forneceram melhores limites inferiores. Estes modelos passaram a designar FluxosY-QS e MTZ-Y-QS, acrescentando assim a nova restrição de quebra de simetrias.

Para a realização destes testes computacionais nos modelos FluxosY-QS e MTZ-Y-QS decidiu-se reduzir o número de instâncias a testar para um subconjunto restrito com n clientes, sendo n=10, 20, 30, 40, 50.

Tabela 4.4: Resultados médios obtidos pelas relaxações lineares dos modelos FluxoY-QS e MTZ-Y-QS sob as políticas ML e OU e respetivo CPU.

política ML												
n	H=3				H=6				H=10			
	FluxosY-QS		MTZ-Y-QS		FluxosY-QS		MTZ-Y-QS		FluxosY-QS		MTZ-Y-QS	
	%Gap	CPU	%Gap	CPU	%Gap	CPU	%Gap	CPU	%Gap	CPU	%Gap	CPU
10	18,24%	0,02	20,33%	0,01	18,52%	0,02	20,79%	0,01	17,24%	0,03	19,44%	0,02
20	16,02%	0,05	18,01%	0,01	18,72%	0,16	20,10%	0,03	18,05%	0,30	20,38%	0,05
30	13,23%	0,17	14,21%	0,02	14,27%	0,32	15,37%	0,06	**	**	**	**
40	13,37%	0,27	13,76%	0,04	**	**	**	**	**	**	**	**
50	11,59%	0,53	12,20%	0,06	**	**	**	**	**	**	**	**
política OU												
n	H=3				H=6				H=10			
	FluxosY-QS		MTZ-Y-QS		FluxosY-QS		MTZ-Y-QS		FluxosY-QS		MTZ-Y-QS	
	%Gap	CPU	%Gap	CPU	%Gap	CPU	%Gap	CPU	%Gap	CPU	%Gap	CPU
10	25,51%	0,01	27,40%	0,00	21,29%	0,02	23,45%	0,01	18,99%	0,06	21,11%	0,01
20	20,01%	0,05	21,88%	0,00	20,08%	0,16	22,23%	0,03	19,03%	0,29	21,30%	0,04
30	17,00%	0,17	17,72%	0,02	15,38%	0,33	19,32%	0,05	**	**	**	**
40	17,20%	0,26	18,11%	0,03	**	**	**	**	**	**	**	**
50	15,37%	0,49	16,20%	0,06	**	**	**	**	**	**	**	**

Com a introdução da restrição de quebras de simetrias nos modelos mencionados anteriormente, esperava-se que ocorressem mais cortes com consequente fortalecimento das respectivas relaxações lineares, ou seja, menores valores médios de Gap. Todavia, o esperado não se verificou como se pode observar na tabela 4.4, os modelos FluxosY-QS e MTZ-Y-QS sob as duas políticas de reabastecimento produziram sempre os mesmos valores de Gap médios obtidos nos modelos FluxosY e MTZ-Y-QS.

Analisando os tempos médios de computação necessários para resolução da relaxação linear, é verificado novamente tempos de computação inferiores para o modelo MTZ-Y-QS, quer para a política ML como para a política OU. Como se esperava, tendo em conta a diferença de dimensões nos modelos referidos para uma dada instância. Contudo, ao compararmos os tempos de CPU médios entre os modelos FluxosY-QS e FluxosY, observa-se em média que os tempos de CPU são ligeiramente melhores no modelo FluxosY sob as duas políticas de reabastecimento ML e OU, no entanto pouco significativos.

Assim, optou-se por continuar os teste computacionais apenas com o modelo FluxosY que apesar de demorar mais tempo a fornecer os limites inferiores, conseguiu obter as melhores relaxações lineares nas instâncias testadas para esta dissertação.

Como foi referido na secção 3.2 do capítulo 3, foi proposta uma nova política de reabastecimento denominada como política NP para esta dissertação. Esta nova política permite que cada cliente tenha no final do horizonte temporal o mesmo nível de inventário armazenado que tinha no início do horizonte temporal ( $H=0$ ).

Assim, esta nova política permite ao agente de decisão dividir o horizonte temporal em vários sub-problemas e no final, juntando as soluções parciais, obter uma solução admissível, caso não seja possível por motivos computacionais (falta de memória) encontrar a solução ótima para o problema original.

Tabela 4.5: Comparação da média dos valores de Gap e dos tempos de CPU (segundos) obtidos nas políticas ML, OU e NP sob o modelo FluxosY.

<b>H=3</b>						
	<b>ML</b>		<b>OU</b>		<b>NP</b>	
<b>n</b>	<b>%Gap</b>	<b>CPU</b>	<b>%Gap</b>	<b>CPU</b>	<b>%Gap</b>	<b>CPU</b>
<b>10</b>	18,24%	0,01	25,51%	0,00	20,67%	0,01
<b>20</b>	16,02%	0,05	20,01%	0,01	21,38%	0,04
<b>30</b>	13,23%	0,15	17,00%	0,02	16,53%	0,14
<b>40</b>	13,37%	0,26	17,20%	0,04	17,66%	0,25
<b>50</b>	11,59%	0,47	15,58%	0,07	14,82%	0,42
<b>H=6</b>						
	<b>ML</b>		<b>OU</b>		<b>NP</b>	
<b>n</b>	<b>%Gap</b>	<b>CPU</b>	<b>%Gap</b>	<b>CPU</b>	<b>%Gap</b>	<b>CPU</b>
<b>10</b>	18,52%	0,02	21,29%	0,02	18,63%	0,03
<b>20</b>	18,72%	0,15	20,08%	0,02	18,35%	0,14
<b>30</b>	14,27%	0,30	15,22%	0,06	15,06%	0,30
<b>H=10</b>						
	<b>ML</b>		<b>OU</b>		<b>NP</b>	
<b>n</b>	<b>%Gap</b>	<b>CPU</b>	<b>%Gap</b>	<b>CPU</b>	<b>%Gap</b>	<b>CPU</b>
<b>10</b>	17,24%	0,04	18,99%	0,02	18,08%	0,05
<b>20</b>	18,05%	0,27	19,03%	0,05	17,99%	0,29

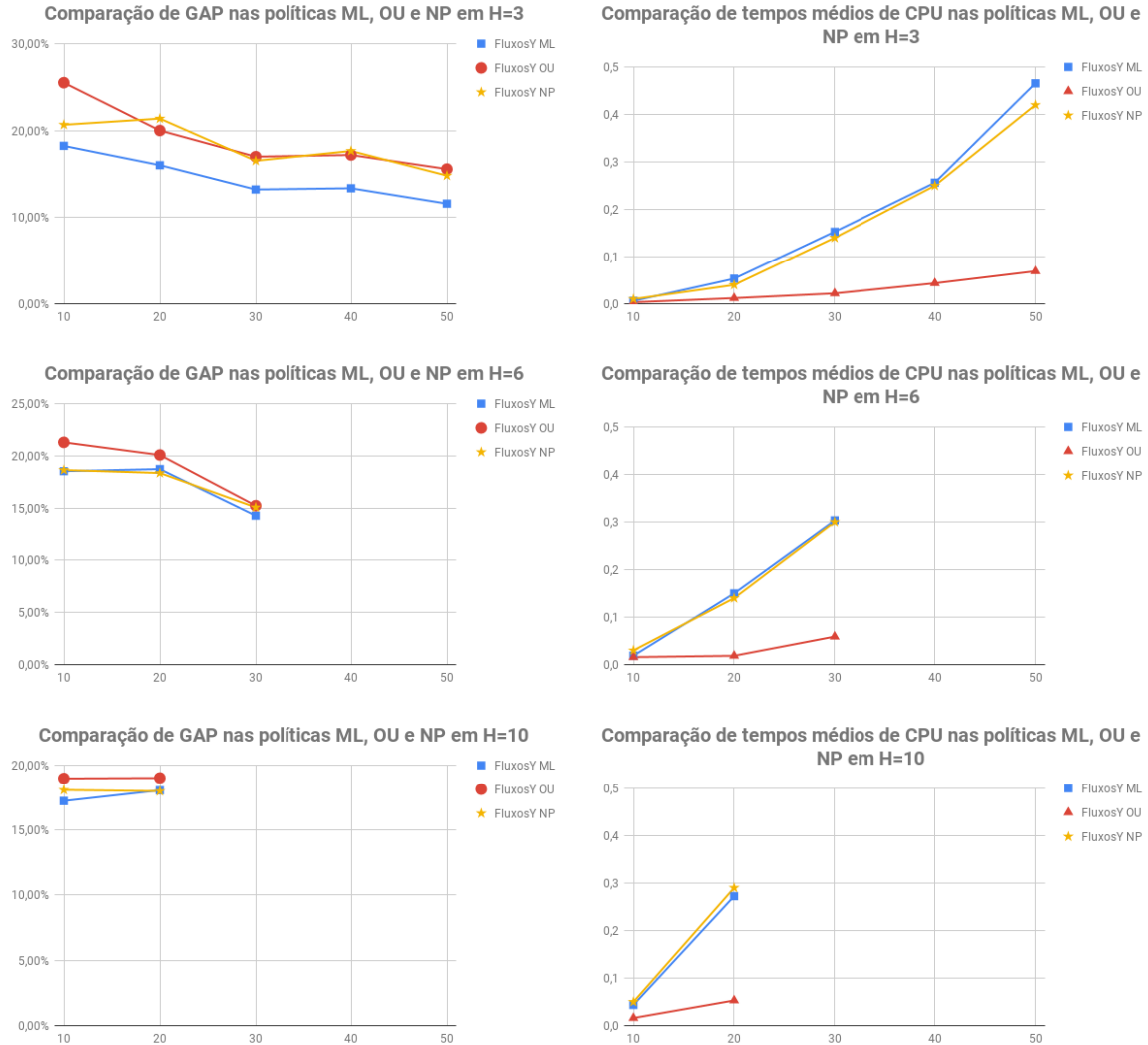


Figura 4.2: Comparação baseada na média dos Gap e tempos de CPU (segundos) obtidos nas políticas ML, OU e NP sob o modelo FluxosY.

Através da figura 4.2 observa-se para o horizonte  $H=3$  e considerando o aumento do número de clientes, que as políticas OU e NP sob o modelo FluxosY obtiveram em média maiores valores de Gap em relação à política ML, ou seja, verificou-se uma maior diferença entre o valor da relaxação linear e o valor ótimo da solução. Em relação aos tempos médios de computação, a política OU foi a que necessitou de menos tempo para a resolução da sua relaxação linear. Todavia, as políticas ML e NP apresentaram tempos de execução muito similares, onde se verificou um aumento gradual à medida que o número de clientes também ia aumentando.

Quando o horizonte temporal aumenta para  $H=6$  e para  $H=10$ , a política NP começa a tomar em média valores de Gap semelhantes aos da política ML porém, a política OU continua a obter piores limites inferiores. Para os tempos médios de execução necessários para a resolução da relaxação linear nos horizontes  $H=6$  e  $H=10$ , verificou-se o mesmo comportamento ocorrido em  $H=3$ , ou seja, a política OU continuou a apresentar os menores tempos médios de computação.

## 4.2.2 Comparação entre modelos

Na tabela 4.6 encontram-se os tempos médios de CPU necessário para obter a solução ótima para os modelos base de Fluxos e MTZ, para cada uma das políticas de reabastecimento ML e OU, obtidos para cada conjunto de instâncias com igual número de clientes.

Tabela 4.6: Comparação do tempo médio de CPU (segundos) necessário para resolver os modelos Fluxos e MTZ sob as políticas ML e OU.

n	política ML						política OU					
	H=3		H=6		H=10		H=3		H=6		H=10	
	Fluxos	MTZ	Fluxos	MTZ	Fluxos	MTZ	Fluxos	MTZ	Fluxos	MTZ	Fluxos	MTZ
5	0,13	0,09	1,19	2,01	5,43	200,69	0,18	0,13	1,54	3,94	5,85	132,85
10	0,63	0,93	11,26	573,61	136,59	**	2,61	7,15	41,818	1473,25	194,555	**
15	2,99	4,47	19,95	**	115,20	**	6,42	94,97	28,14	**	285,57	**
20	8,05	2471,12	47,74	**	5912,33	**	11,53	1449,49	90,45	**	438,77	**
25	12,17	1613,89	139,91	**	**	**	39,90	**	2942,79	**	**	**
30	24,100	2425,10	1226,72	**	**	**	68,83	**	1852,41	**	**	**
35	32,08	943,96	8327,96	**	**	**	179,40	**	**	**	**	**
40	80,76	**	**	**	**	**	419,44	**	**	**	**	**
45	183,86	**	**	**	**	**	848,71	**	**	**	**	**
50	227,78	**	**	**	**	**	4080,77	**	**	**	**	**

Analizando inicialmente o modelo Fluxos, observa-se na política ML que ao aumentar o número de clientes no horizonte temporal H=3, o tempo médio de CPU necessário para resolver o modelo tem um aumento gradual, sendo de rápida obtenção a solução ótima das instâncias. Contudo, para a política OU a sua resolução é mais lenta e o aumento do tempo médio de CPU é mais acentuado quando o número dos clientes aumenta.

Ainda para o modelo Fluxos e para as duas políticas de reabastecimento, ao aumentar o horizonte temporal para H=6 ou H=10, o tempo médio de CPU necessário para obter a solução ótima aumenta consideravelmente e é mais sensível ao aumento do número de clientes, verificando-se um agravamento mais acentuado.

O modelo MTZ apresenta melhores tempos médios de CPU para a política ML como se verificou também no modelo Fluxos. Analisando o aumento do número de clientes para um horizonte temporal com H=3, o tempo médio de CPU necessário para resolver o modelo sob a política ML tem um aumento gradual, podendo-se considerar a resolução rápida até ao conjunto de instâncias com 15 clientes. No entanto, a média de tempos de CPU nas instâncias de 20 clientes aumenta bruscamente e para um número superior de clientes deixa de ser possível resolver o modelo (células assinaladas a \*\*). Referir ainda que para as instâncias com 35 clientes o modelo conseguiu obter soluções ótimas num tempo médio inferior aos obtidos para 20, 25 e 30 clientes. Na política OU, os tempos médios de CPU obtidos são maiores comparativamente aos obtidos com a política ML. Todavia, na política OU só foi possível obter resultados até às instâncias com 20 clientes.

Aumentando o horizonte temporal, quer para H=6 ou para H=10, apenas foi possível resolver o modelo MTZ para as instâncias com 5 clientes. Tal como aconteceu para o caso H=3, o modelo MTZ apresentou em média menores tempos médios de CPU sob a política ML.

Comparando os dois modelos, conclui-se que o CPU médio para a resolução dos modelos é muito menor no modelo Fluxos, para o qual se conseguem resolver instâncias com um maior número de clientes. Curiosamente, o modelo MTZ apresentou melhores resultados de tempos médios de computação quando se resolveu as suas relaxações lineares.

Outro facto importante de realçar é que o modelo de Fluxos apresenta um maior número de variáveis e restrições em relação ao modelo MTZ. Desta forma, como foi apresentado na secção anterior da qua-

lidade da relaxação linear, o modelo Fluxos obteve em média valores de Gap inferiores em relação ao modelo MTZ, significando assim uma possível menor ramificação e quantidade de nodos na sua árvore de pesquisa, tornando mais eficiente a obtenção da solução ótima do problema.

Para se observar melhor a diferença entre os tempos médios de CPU dos modelos Fluxos e MTZ e as duas políticas de reabastecimento, apresentam-se os seguintes gráficos construídos com base nos resultados apresentados na tabela 4.6.

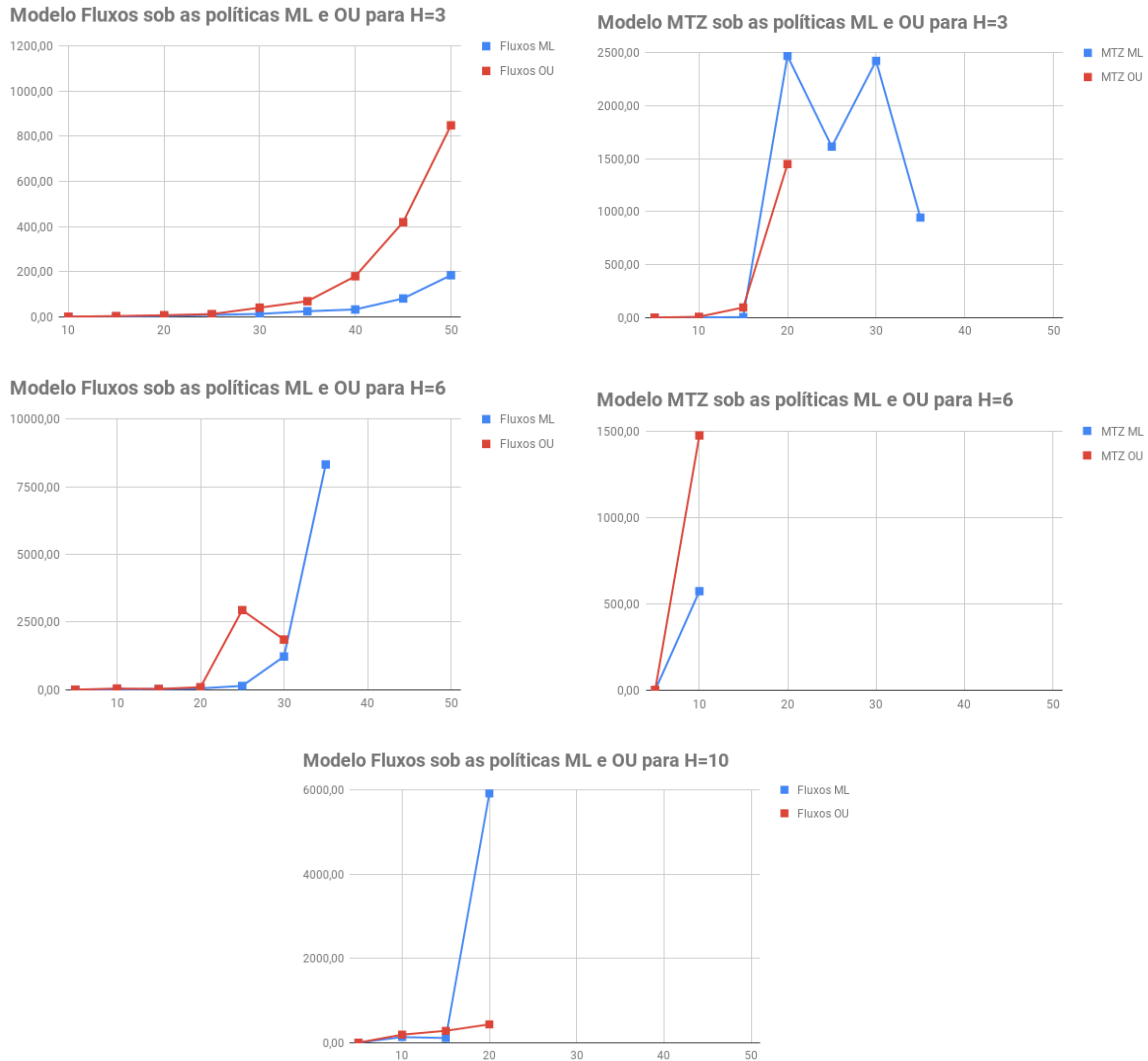


Figura 4.3: Comparação dos tempos médios de CPU para os modelos Fluxos e MTZ e respectivas políticas ML e OU.

Nota: Não se considerou o modelo MTZ para H=10 visto que só se obteve resultados para o conjunto de instâncias com 5 clientes.

Na tabela 4.7 encontram-se os tempos médios de CPU necessário para obter a solução ótima para os modelos FluxosY e MTZ-Y, para as políticas de reabastecimento ML e OU.

Tabela 4.7: Comparação do tempo médio de CPU (segundos) necessário para resolver os modelos FluxosY e MTZ-Y sob as políticas ML e OU.

n	política ML						política OU					
	H=3		H=6		H=10		H=3		H=6		H=10	
	FluxosY	MTZ-Y	FluxosY	MTZ-Y	FluxosY	MTZ-Y	FluxosY	MTZ-Y	FluxosY	MTZ-Y	FluxosY	MTZ-Y
5	0,09	0,09	0,34	0,60	1,46	8,38	0,12	0,27	0,31	0,71	1,39	5,44
10	0,36	0,26	3,43	57,28	23,92	**	0,76	1,38	9,67	2 229,05	37,94	**
15	1,37	1,87	23,23	19 774,26	108,13	**	4,49	9,69	26,46	13 074,76	183,33	**
20	4,56	0,26	52,38	**	2 014,96	**	12,23	5 129,89	81,64	**	6 058,04	**
25	8,99	1,87	155,36	**	**	**	29,21	5 733,32	1 145,72	**	**	**
30	25,03	76,16	946,06	**	**	**	69,94	4 922,65	1 360,41	**	**	**
35	20,10	44,77	5 451,09	**	**	**	169,08	57 043,35	7 578,88	**	**	**
40	117,01	182,48	**	**	**	**	538,65	**	**	**	**	**
45	113,58	224,47	**	**	**	**	717,57	**	**	**	**	**
50	205,08	876,47	**	**	**	**	4 911,75	**	**	**	**	**

Através da tabela acima, podemos concluir que o modelo FluxosY tem um comportamento semelhante ao modelo Fluxos na variação obtida no tempo médio de computação necessário para obter a solução ótima causada quer por aumento de número de clientes, quer por aumento do horizonte temporal, quer pela política adotada para o reabastecimento. Assim, observa-se para o modelo FluxosY num horizonte com H=3, os tempos médios de CPU necessários para resolver o modelo sob a política ML são pequenos e têm um aumento gradual quando se aumenta o número de clientes. Para a política OU, o tempo médio de CPU necessário é maior em relação à política ML, obtendo-se grandes diferenças de tempos de resolução para os conjuntos de instâncias com maior número de clientes.

Aumentando o horizonte temporal para H=6 ou H=10, deixa de ser possível resolver o modelo sob a política ML a partir do conjunto de instâncias com 40 clientes, pelos mesmos motivos referidos anteriormente. Na política OU, o modelo também só consegue ser resolvido até 40 clientes, contudo apresenta tempos médios de CPU bastantes superiores em relação à política ML.

O modelo MTZ-Y tem um mesmo tipo de comportamento verificado para o modelo FluxoY, onde para a política de reabastecimento ML apresenta tempos médios de CPU inferiores aos obtidos para a política OU. Ao analisar a política ML para H=3, para os conjuntos de instâncias com um pequeno número de clientes constata-se que o tempo médio de computação é pequeno observando-se um aumento gradual quando o número de clientes aumenta. Todavia para os conjuntos de instâncias com número de clientes superior a 25, a resolução do modelo torna-se mais lenta. Relativamente à política OU, os tempos médios de CPU necessário para resolver o modelo MTZ-Y são consideravelmente superiores principalmente para as instâncias com mais de 20 clientes. Para as instâncias com um número de clientes superior a 35, deixa de ser possível obter soluções ótimas.

Para ambas as políticas de reabastecimento, aumentando o horizonte temporal, para H=6 e H=10, resulta numa grande redução no número de instâncias para as quais é possível obter a solução ótima. Para os casos onde foi possível obter a solução ótima, observou-se um aumento notório dos tempos médios de CPU comparativamente com os valores correspondentes obtido para H=3.

Analisando os dois modelos na globalidade, verifica-se novamente que é possível resolver o modelo FluxosY num menor tempo médio de CPU. Observando-se ainda que com o modelo FluxosY consegue-se, novamente resolver mais instâncias sob as duas políticas de reabastecimento quando se aumenta o número de clientes e o horizonte temporal.

De forma a poder observar melhor essa diferença de tempos médios de CPU entre os modelos FluxosY e MTZ-Y e as políticas ML e OU, são apresentados os seguintes gráficos com base nos tempos

médios de computação da tabela 4.7. Através da figura abaixo, é de notar a discrepância de tempos médios de CPU entre os dois modelos.

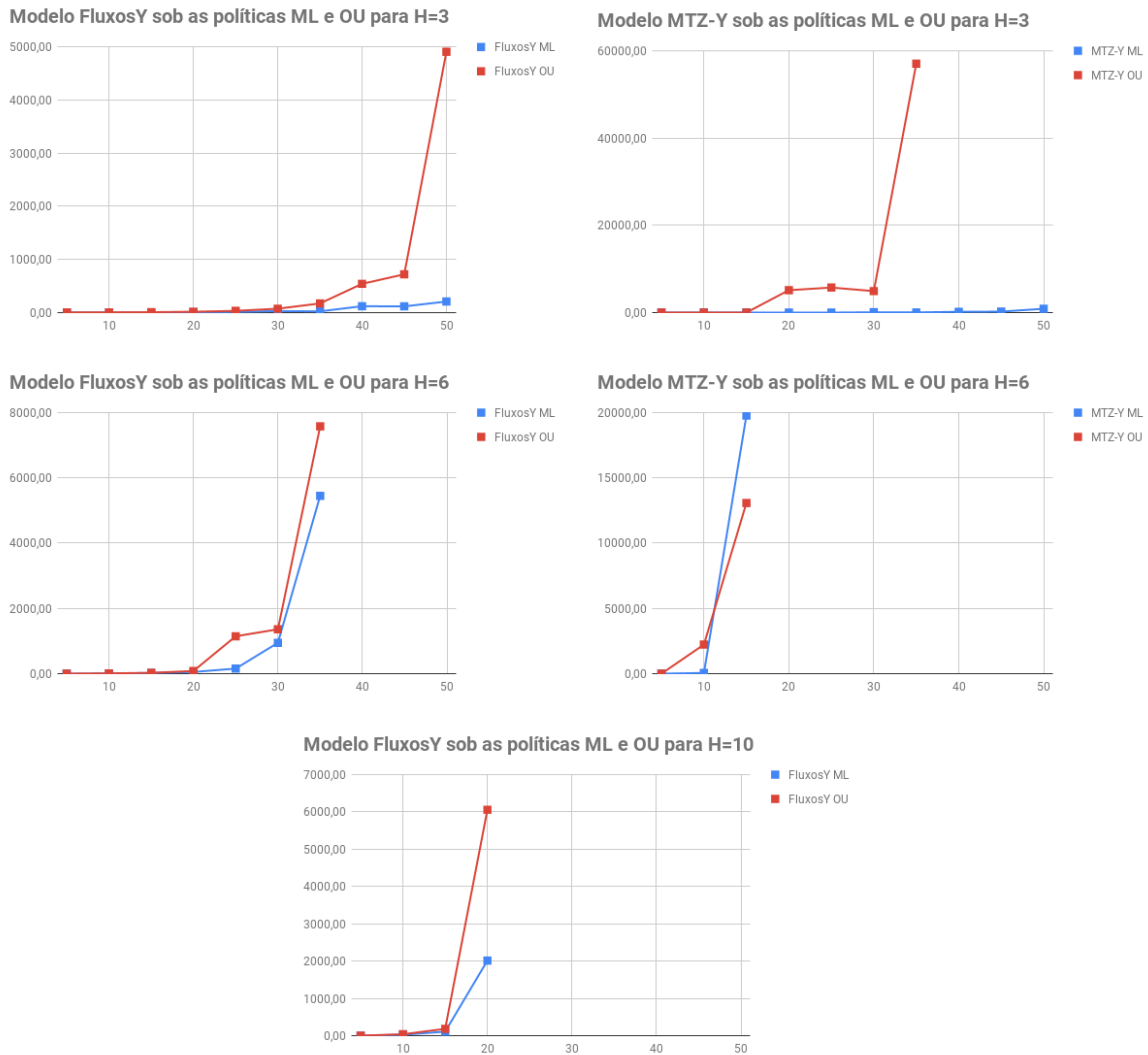


Figura 4.4: Comparação dos tempos médios de CPU para os modelos FluxosY e MTZ-Y e respectivas políticas ML e OU.

Nota: Não se considerou o modelo MTZ para H=10 visto que só se obteve resultados para o conjunto de instâncias com 5 clientes.



Assim como já foi referido anteriormente o propósito da introdução dos modelos FluxosY e MTZ-Y, construiu-se os seguintes gráficos representados na figura 4.5 com base nas tabelas 4.6 e 4.7, de forma a poder comparar as alterações dos tempos médios de CPU com os modelos base Fluxos e MTZ para cada política de reabastecimento, ao longo dos horizontes temporais utilizados nesta dissertação.

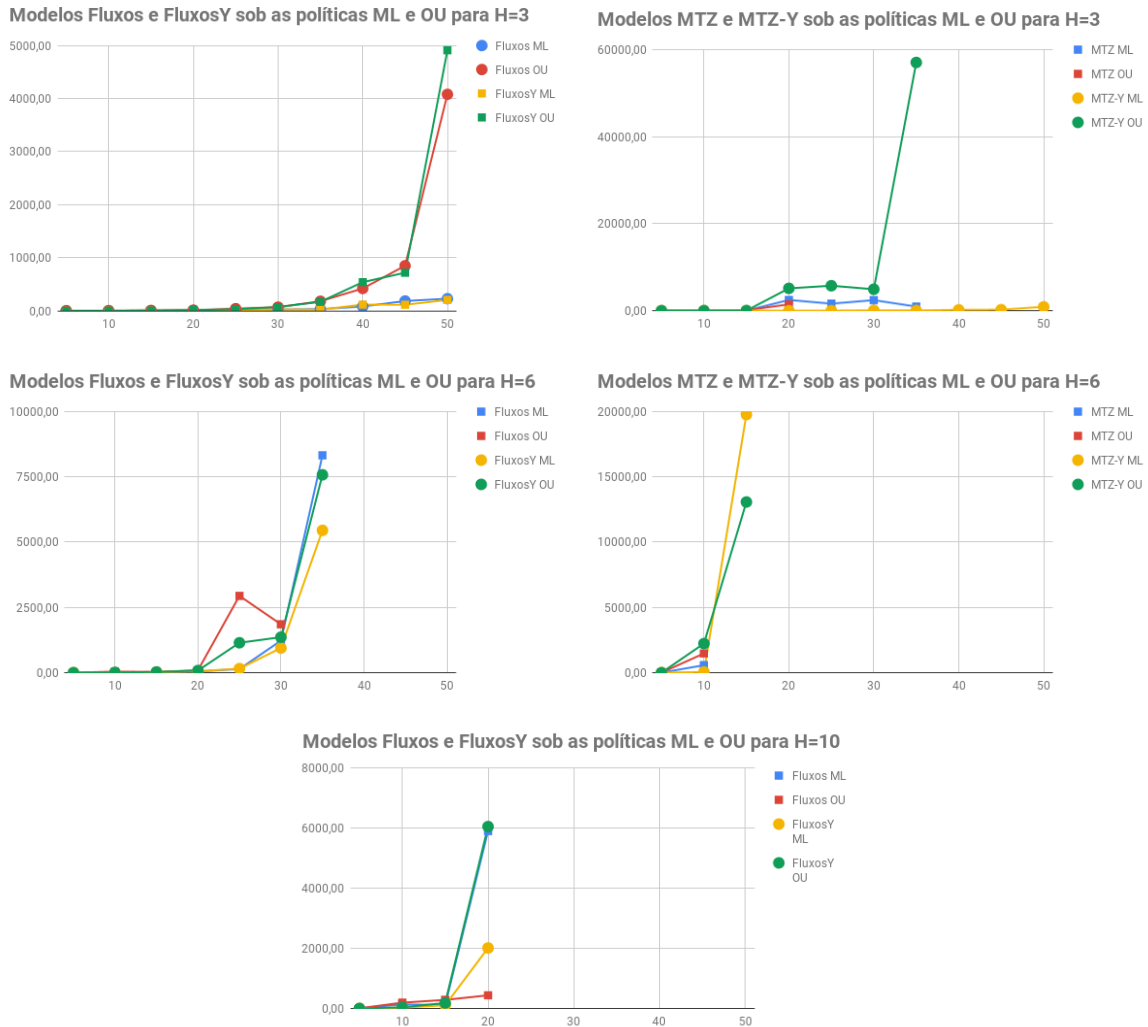


Figura 4.5: Comparação dos tempos médios de CPU (segundos) para os modelos Fluxos, FluxosY, MTZ e MTZ-Y e respetivas políticas ML e OU.

Através da figura acima, pode-se observar que os tempos médios de CPU são muito semelhantes nos modelos Fluxos e FluxosY sob as duas políticas de reabastecimento para H=3. No entanto, o modelo FluxosY apresenta ligeiramente melhores tempos médios de computação, isto é, consegue em média obter a solução ótima em menos tempo.

Quando o horizonte temporal passa para H=6 e H=10, já é possível verificar a redução no tempo médio de CPU obtida para o modelo FluxosY na política ML em relação ao modelo Fluxos. Para a política OU o mesmo é verificado, isto é, o modelo de FluxosY consegue em média encontrar a solução ótima do problema num menor tempo de CPU. De referir ainda que, no horizonte temporal H=6, com o modelo Fluxos deixa de ser possível obter a solução ótima para o conjunto de instâncias com mais de 35 clientes, enquanto que com o modelo FluxosY essa situação só ocorre para instâncias com 40 clientes ou mais.

Comparando os modelos MTZ-Y e MTZ, pode-se observar tempos médios de CPU semelhantes para

os dois modelos em  $H=3$ . O modelo MTZ-Y na política ML apresenta menores tempos médios de CPU porém, para o modelo MTZ deixa de ser possível obter a solução ótima para conjunto de instâncias com 35 e mais clientes. Em relação à política OU, observa-se o mesmo comportamento descrito para a política ML, onde se verificou para modelo MTZ que não conseguiu obter a solução ótima para o conjunto de instâncias com 20 ou mais clientes.

Para ambos os modelos e para ambas as políticas de reabastecimento, aumentando o horizonte temporal para  $H=6$  e  $H=10$  só se conseguem resolver os conjuntos de instâncias mais pequenas (15 clientes no modelo MTZ e 20 clientes no modelo MTZ-Y). A diferença observada nos tempos médios de CPU para resolver cada um dos modelos já é significativamente maior, tendo o modelo MTZ-Y apresentado novamente menores tempos médios de CPU. Mais uma vez para  $H=10$  não foi apresentado o gráfico pelo mesmo motivo já referido nas figuras anteriores.

Comparando globalmente os modelos FluxosY e MTZ-Y, é claramente visível que o modelo FluxosY consegue em média ser mais eficiente e sobretudo consegue resolver um maior número de instâncias independentemente das políticas de reabastecimento considerada.

A análise que se segue é referente aos modelos FluxosY-QS e MTZ-Y-QS, onde se acrescentou a nova restrição de quebras de simetrias. Como foi explicado anteriormente, os modelos FluxosY e MTZ-Y em ambas as políticas de reabastecimento apresentavam ao longo do horizonte temporal simetria em algumas rotas. De forma a perceber melhor essas simetrias, apresenta-se na figura abaixo uma instância com 5 clientes, que foi resolvida sob o modelo FluxosY para a política ML. Contudo, o mesmo também é verificado para a política OU e no modelo MTZ sob as duas políticas de reabastecimento.

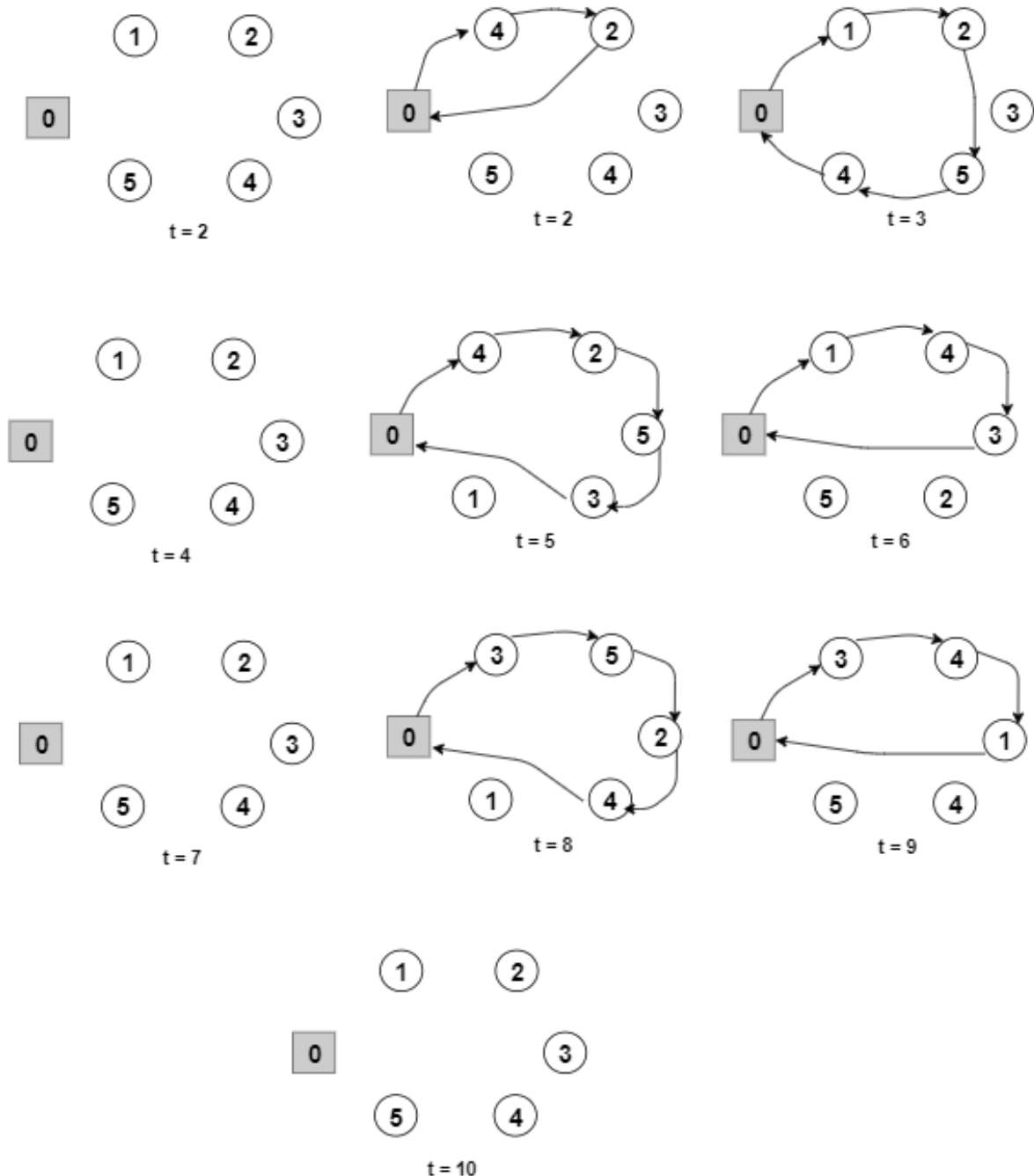


Figura 4.6: Representação das rotas simétricas de uma instância de teste resolvida sob modelo FluxosY para a política ML dado um horizonte temporal  $H=10$ .

Na tabela 4.8 encontram-se os valores dos tempos médios de CPU necessários para resolver os modelos FluxosY-QS e MTZ-Y-QS sob as políticas ML e OU.

Tabela 4.8: Comparação do tempo médio de CPU (segundos) necessário para resolver os modelos FluxosY-QS e MTZ-Y-QS sob as políticas ML e OU.

n	política ML						política OU					
	H=3		H=6		H=10		H=3		H=6		H=10	
	FluxosY-QS	MTZ-Y-QS	FluxosY-QS	MTZ-Y-QS	FluxosY-QS	MTZ-Y-QS	FluxosY-QS	MTZ-Y-QS	FluxosY-QS	MTZ-Y-QS	FluxosY-QS	MTZ-Y-QS
10	0,44	0,34	3,45	43,63	32,52	**	0,57	1,50	9,72	2432,10	80,95	**
20	5,17	329,22	63,04	353,08	1200,74	**	9,21	1516,92	98,16	**	2801,70	**
30	21,85	66,40	1366,50	**	**	**	83,83	11427,42	1473,73	**	**	**
40	73,98	255,71	**	**	**	**	349,32	**	**	**	**	**
50	236,64	625,28	**	**	**	**	5065,96	**	**	**	**	**

Com base nos resultados obtidos, pode observar-se em H=3 que o modelo FluxosY-QS sob a política ML apresenta melhores tempos médios de CPU para a resolução do problema relativamente à política OU, sendo que a partir das instâncias com 40 ou mais clientes essa diferença torna-se bastante significativa.

Quando o horizonte passa para H=6, verifica-se novamente o mesmo comportamento ocorrido em H=3, onde a política ML apresenta melhores tempos médios de computação comparativamente aos obtidos para a política OU, sendo que essa diferença de tempos não foi tão acentuada. No horizonte H=10, deixa de ser possível resolver o modelo sob as duas políticas de reabastecimento a partir do conjunto instâncias com 20 clientes. Contudo, a política ML apresentou menores tempos médios de CPU necessários para a sua resolução em relação à política OU.

Para o modelo MTZ-Y-QS, pode-se observar no horizonte de H=3 que a política OU é bastante mais lenta a ser resolvida em relação à política ML, deixando de conseguir encontrar a solução ótima para conjuntos de instâncias com 40 ou mais clientes.

Quando o horizonte temporal aumenta para H=6, a resolução do modelo torna-se mais lenta em ambas duas políticas, onde resulta numa grande redução no número de instâncias para as quais é possível obter a solução ótima. Para os casos onde foi possível obter a sua solução ótima, observou-se um aumento notório nos tempos computacionais comparando com os valores obtidos em H=3.

Analisando os modelos na globalidade e tendo em conta também os resultados obtidos nos modelos anteriores, era expectável que o modelo MTZ-Y-QS apresentasse piores tempos médios de CPU. Observa-se ainda que o modelo FluxosY-QS consegue, novamente resolver mais instâncias sob as duas políticas de reabastecimento quando se aumenta o número de clientes e também o horizonte temporal (especialmente para H=10, onde o modelo MTZ-Y-QS não conseguiu obter qualquer solução ótima).

Para se perceber melhor a diferença entre os tempos médios de CPU necessários para resolver os modelos acima referidos, construiu-se os seguintes gráficos com base nos resultados apresentados na tabela 4.8. Referir ainda que os gráficos do modelo MTZ-Y-QS sob as políticas ML e OU para H=6 e H=10 não foram apresentados devido à escassez de resultados.

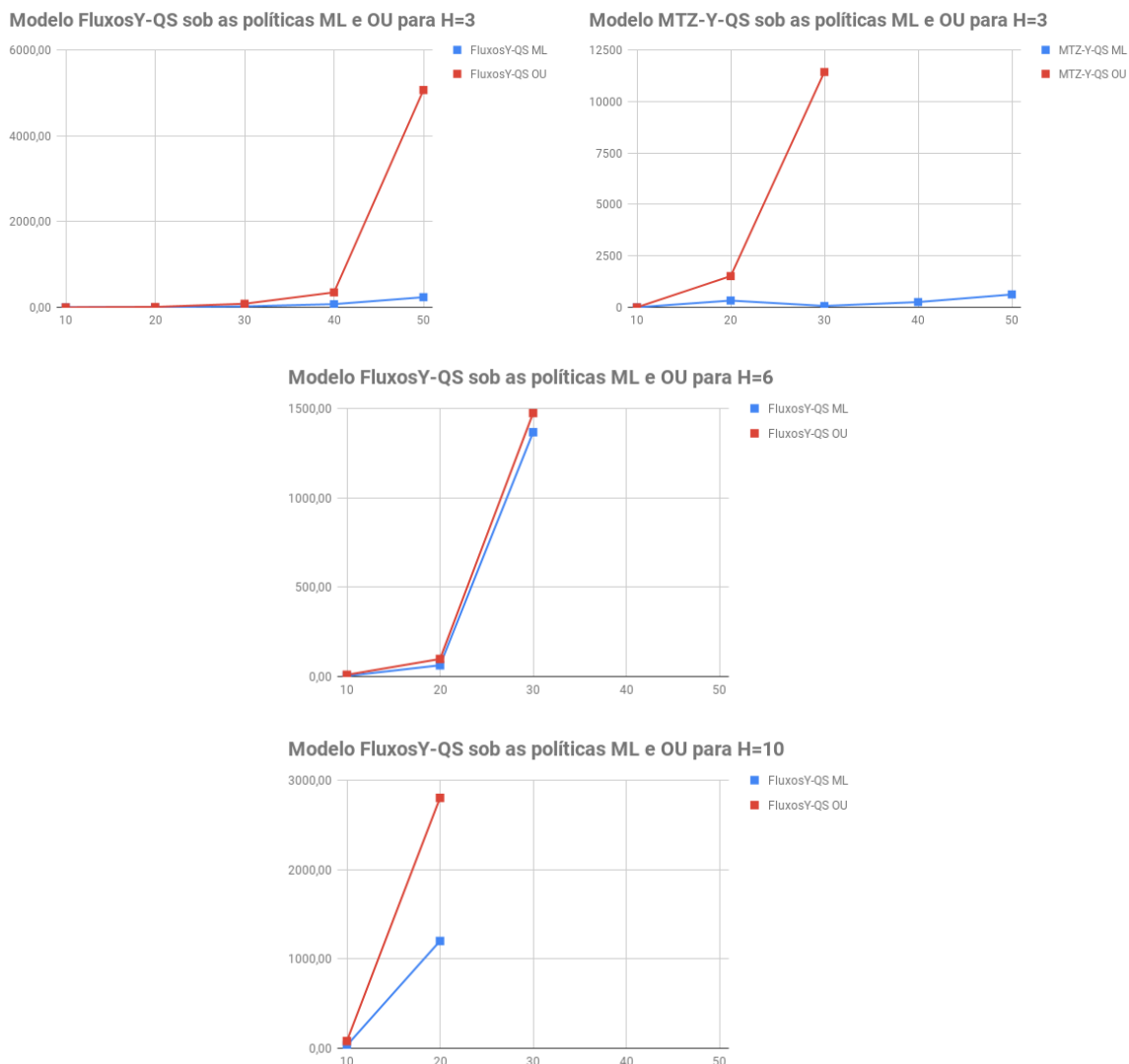


Figura 4.7: Comparação dos tempos médios de CPU (segundos) para os modelos FluxosY-QS e MTZ-Y-QS e respectivas políticas ML e OU.

De forma a ter uma melhor visualização da comparação dos tempos médios de CPU necessários para resolver os modelos FluxosY, FluxosY-QS, MTZ-Y e MTZ-Y-QS sob as políticas ML e OU, são apresentados os gráficos abaixo com base nas tabelas 4.7 e 4.8.

Com a introdução desta nova restrição nos modelos FluxosY e MTZ-Y, esperava-se que a árvore de pesquisa ficasse menos densa, provocando assim mais cortes com a eliminação das rotas simétricas e que resultasse num menor tempo médio de execução até encontrar a solução ótima, porém não se verificou.

Analisando os gráficos da figura 4.8, pode-se observar que os modelos FluxosY e FluxosY-QS sob as duas políticas começaram por apresentar tempos médios de CPU muito semelhantes dado um horizonte  $H=3$ .

Nos modelos MTZ-Y e MTZ-Y-QS observou-se para a política OU que, o modelo MTZ-Y é mais eficiente na obtenção da solução ótima para um conjunto de instâncias com 10 clientes porém, tendeu a ficar mais lenta na sua resolução com o aumentar do número de clientes. Assim, deixou de conseguir encontrar a solução ótima a partir das instâncias com 30 ou mais clientes. Para o modelo MTZ-Y-QS, o seu comportamento é o inverso do MTZ-Y, isto é, inicialmente apresenta piores resultados mas com o aumento do número de clientes acaba por se tornar mais eficiente na sua resolução (também deixa de

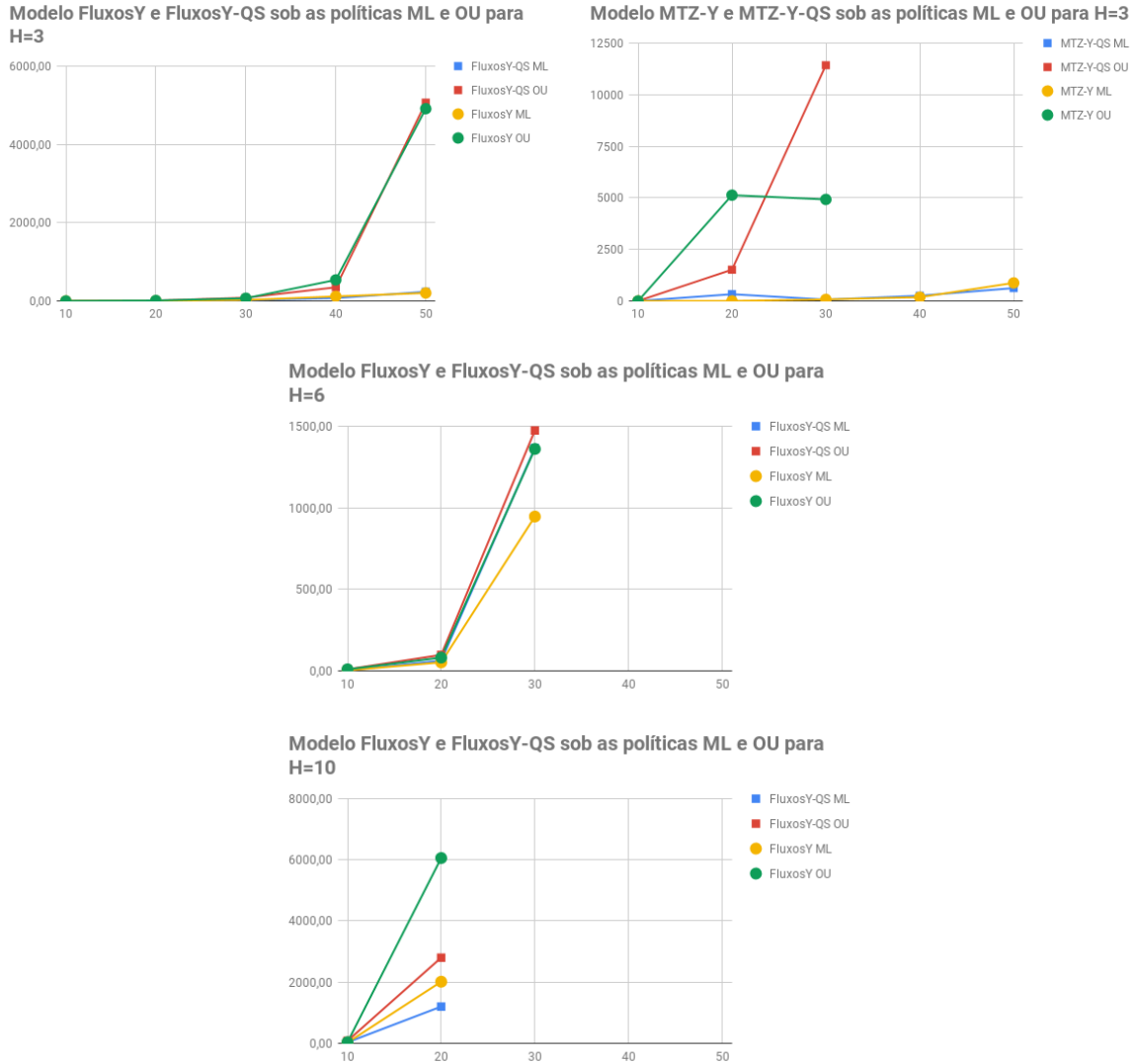


Figura 4.8: Comparação dos tempos médios de CPU (segundos) para os modelos FluxosY, FluxosY-QS, MTZ-Y e MTZ-Y-QS e respectivas políticas ML e OU.

obter a solução ótima a partir do conjunto de 30 clientes). Em relação à política ML, ambos os modelos apresentam tempos médios computacionais relativamente semelhantes consoante o aumento do número de clientes.

Quando o horizonte passa para H=6 e H=10, só foi possível apresentar os gráficos referentes aos modelos FluxosY e FluxosY-QS, dado à escassez de soluções ótimas obtidas pelos modelos MTZ-Y e MTZ-Y-QS. Contudo, é possível observar que dado o aumento no horizonte temporal, o modelo FluxosY-QS sob as duas políticas de reabastecimento torna-se menos eficiente na obtenção da solução ótima, apresentado piores tempos médios de CPU em relação ao modelo FluxosY sob as duas políticas de reabastecimento.

Como foi referido, as três políticas foram resolvidas apenas para o modelo FluxosY, sendo que o motivo para a escolha do modelo foi explicado anteriormente na secção referente à análise da qualidade dos limites inferiores.

Como se verificou nas análises anteriores, não foi possível obter resultados para todos os conjuntos de instâncias sob as políticas ML e OU, considerando os horizontes temporais H=3, 6 e 10. Assim, optou-se por continuar com o subconjunto de instâncias utilizadas anteriormente para os modelos FluxosY-QS e MTZ-Y-QS, sendo que para esta análise em H=3 foram utilizadas as instâncias com n clientes, sendo n= 10, 20, 30, 40 e 50. No horizonte H=6 foram apenas utilizadas as instâncias com n clientes, sendo n= 10, 20 e 30. Por fim, no horizonte H=10, apenas as instâncias com 10 e 20 clientes.

Apresenta-se a tabela do número de restrições e variáveis de cada política resolvida no modelo FluxosY para cada conjunto de instâncias e horizonte temporal.

Tabela 4.9: Comparação do número de restrições e variáveis utilizadas nas políticas ML, OU e NP sob o modelo FluxosY.

H=3						
	ML		OU		NP	
n	restrições	Variáveis	restrições	Variáveis	restrições	Variáveis
10	586	756	615	756	613	756
20	1756	2706	1815	2706	1813	2706
30	3526	5856	3615	5856	3613	5856
40	5896	10206	6015	10206	5896	10206
50	8866	15756	9015	15756	9013	15756
H=6						
	ML		OU		NP	
n	restrições	Variáveis	restrições	Variáveis	restrições	Variáveis
10	1171	1512	1230	1512	1225	1512
20	3511	5412	3630	5412	3625	5412
30	7051	11712	7230	11712	7225	11712
H=10						
	ML		OU		NP	
n	restrições	Variáveis	restrições	Variáveis	restrições	Variáveis
10	1951	2520	2050	2520	2041	2520
20	5851	9020	6050	9020	6041	9020

Na tabela 4.10 encontram-se os valores dos tempos médios de execução necessários para resolver o modelo FluxosY sob as três políticas de reabastecimento ML, OU e a nova variante NP proposta nesta dissertação

Tabela 4.10: Comparação do tempo médio de CPU (segundos) necessários para resolver as políticas ML, OU e NP recorrendo ao modelo FluxosY.

H=3			H=6			H=10			
	ML	OU	NP	ML	OU	NP	ML	OU	NP
n	CPU	CPU	CPU	CPU	CPU	CPU	CPU	CPU	CPU
10	0,36	0,76	0,22	3,43	9,67	1,94	23,92	37,94	27,99
20	4,56	12,23	2,06	52,38	81,64	40,73	2014,96	6058,04	734,58
30	25,03	69,94	11,72	946,06	1360,41	742,60			
40	117,01	538,65	27,72						
50	205,08	4911,75	43,84						

Com base nos resultados obtidos, pode-se observar com o aumentar do número de clientes para o horizonte  $H=3$ , que a nova política (NP) consegue resolver todos os conjuntos de instâncias abaixo de 1 minuto. Contudo, a política OU torna-se bastante mais lenta com o aumentar do número de clientes, verificando-se uma grande diferença nos tempos médio de CPU para as restantes políticas ML e NP.

Quando estamos perante um horizonte  $H=6$ , as políticas ML e NP têm um aumento similar e gradual, contudo a política NP consegue apresentar melhores tempos médios de CPU perante o aumentar do número de clientes. Em relação à política OU continua a ser a política que apresenta piores tempos médios de computação.

No horizonte  $H=10$ , as três políticas apresentaram valores médios de CPU relativamente diferentes entre si tendo em conta o aumento do número de cliente, sendo que a política OU continuou a ser a mais lenta na obtenção da solução ótima.

Analisando as políticas na sua globalidade, pode-se concluir que a política NP consegue encontrar de forma mais eficiente a sua solução ótima. Como foi apresentado na secção anterior da qualidade da relaxação linear, a política ML foi aquela que conseguiu apresentar melhores valores de Gap (menor diferença entre o valor da relaxação linear e o valor ótimo) em relação às restantes políticas, significando assim uma possível menor ramificação na sua árvore de pesquisa. Contudo, a política NP apesar de obter ligeiramente piores valores de Gap em relação à política ML, conseguiu ser mais eficiente quando se tratou da obtenção da solução ótima.

Assim, para observar melhor essa diferença entre os tempos médios de computação das políticas ML, OU e NP, construiu-se os seguintes gráficos com base nos resultados apresentados na tabela 4.10. Onde é notável a diferença dos tempos de computação à medida que se vai aumentando o horizonte temporal.

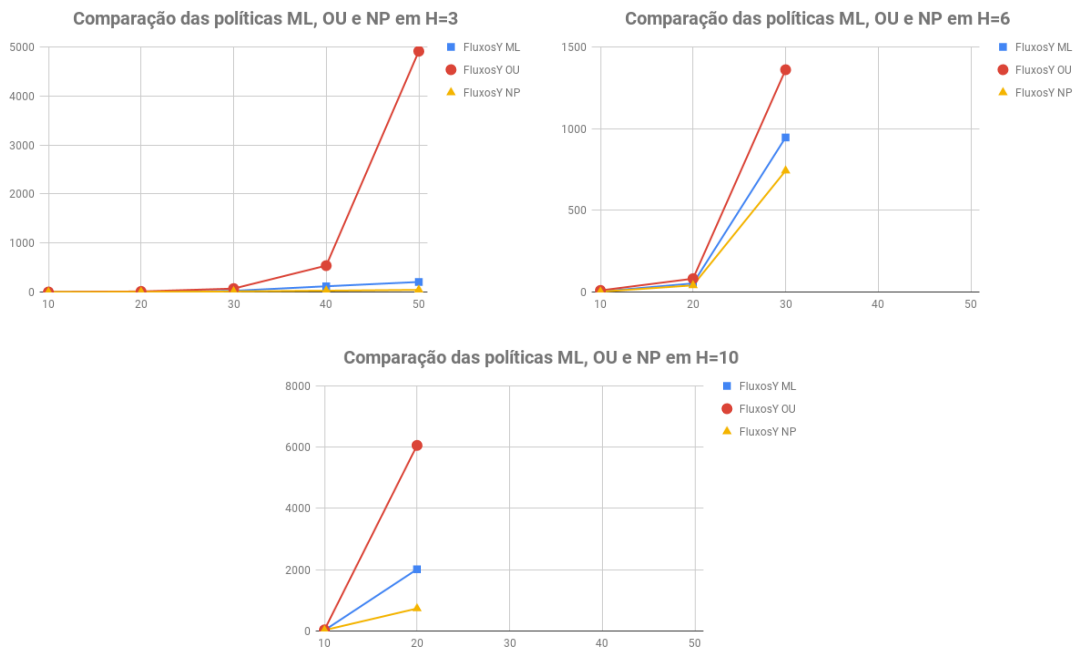


Figura 4.9: Comparação dos tempos médios de CPU (segundos) necessários nas políticas ML, OU e NP recorrendo ao modelo FluxosY.



Nas figuras 4.10 e 4.11 abaixo estão representadas as soluções ótimas de uma instância de teste com 10 clientes sob a política NP para os horizontes temporais  $H=3$  e  $H=6$ . Como se pode observar, a instância quando é resolvida para um horizonte temporal de  $H=6$  apresenta um menor custo relativamente à combinação das duas soluções resolvidas para o horizonte de  $H=3$ . Contudo, a diferença entre a combinação das duas soluções parciais em  $H=3$  e da solução obtida em  $H=6$  não é muito significativa.

Um dos motivos caso não seja possível resolver as instâncias para um horizonte temporal maior, poderá estar relacionado com a sua elevada dimensão, isto é, o aumento do número de clientes ou o alargamento do horizonte de planeamento provocará maior tempo de execução até à obtenção da solução ótima, e, onde possivelmente o agente de decisão que não estará disposto a tal tempo de espera. Como também mesmo devido à falta de memória do computador, como se apurou em muitas instâncias de teste para esta dissertação com horizontes temporais maiores.

Assim, uma forma de colmatar este obstáculo passa por utilizar a política NP, onde podemos obter uma solução admissível para o horizonte maior através da combinação das soluções parciais para os horizontes temporais parciais. Poderá ser benéfico para os clientes, dado que após o fim do horizonte temporal ainda continuam no activo, ou seja, as suas empresas não fecham e ainda é garantido o mesmo nível de inventário que tinham no início do horizonte de planeamento.

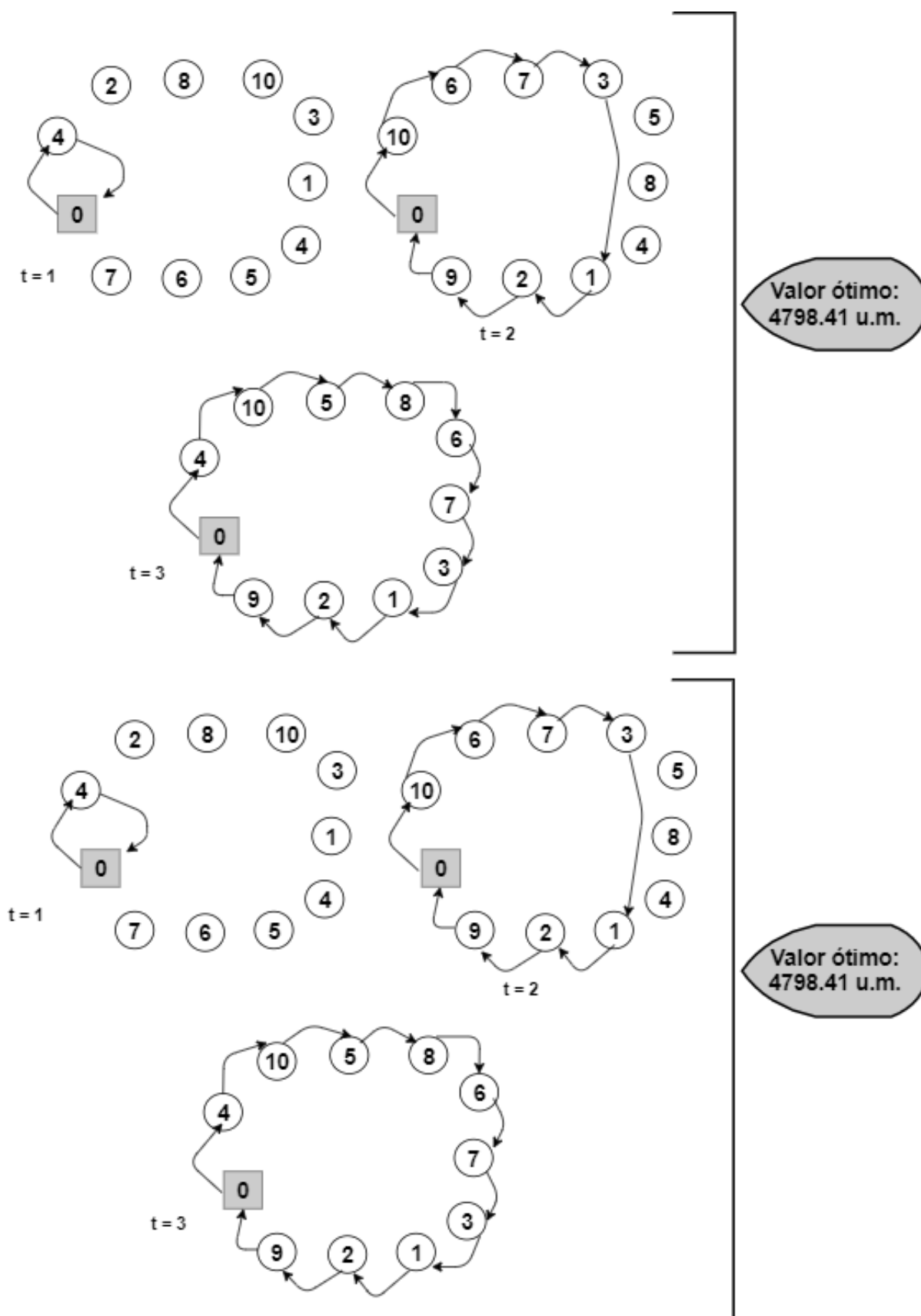


Figura 4.10: Representação das rotas de uma instância de teste com 10 clientes resolvido sob modelo Fluxos para a política NP dado um horizonte temporal de  $H=3$ .

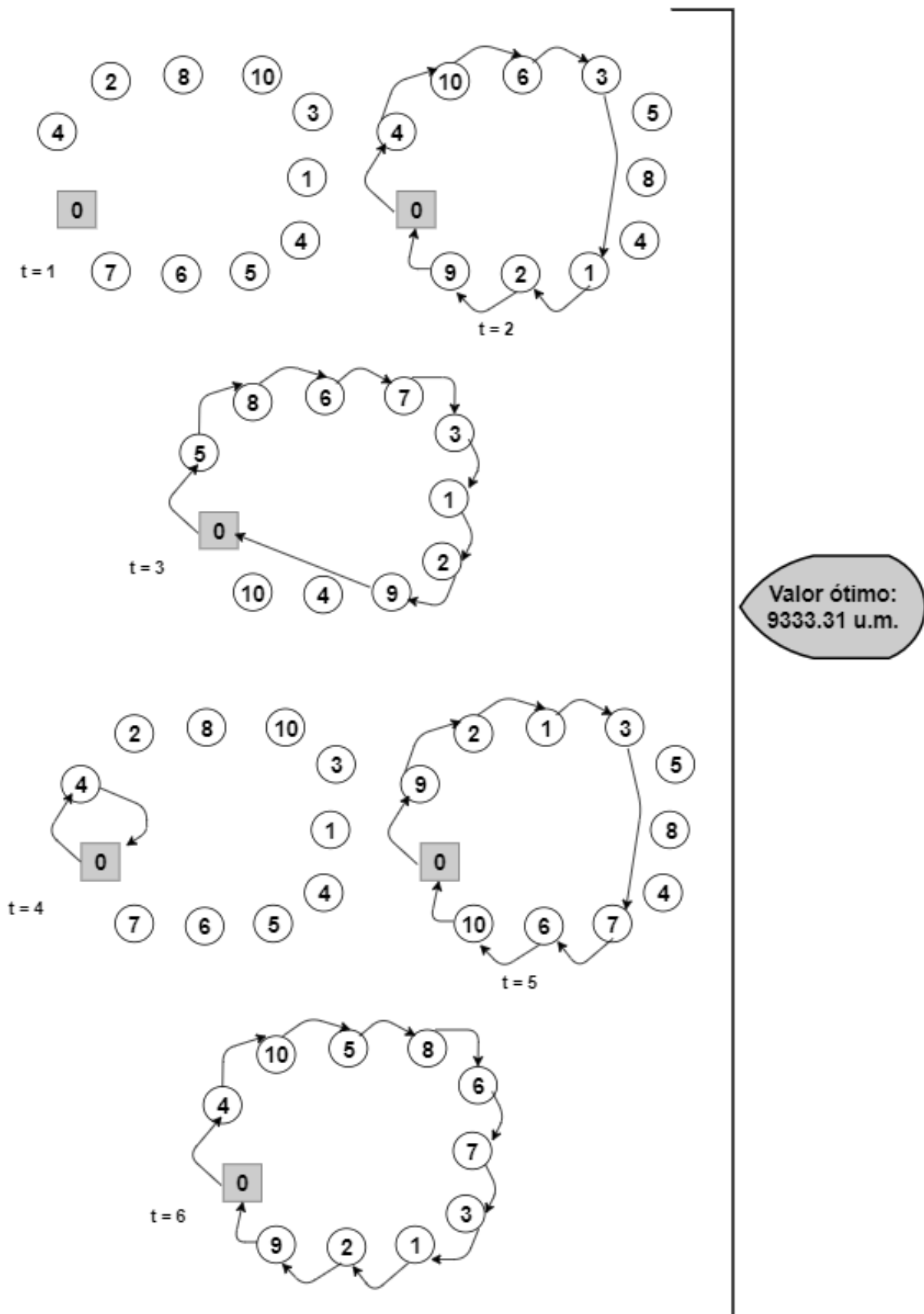


Figura 4.11: Representação das rotas de uma instância de teste com 10 clientes resolvida sob modelo Fluxos para a política NP dado um horizonte temporal de  $H=6$ .



## Capítulo 5

# Conclusão

O objetivo desta dissertação consistiu em resolver o problema de gestão integrada das rotas de entrega e inventário para um produto, também designado por *inventory-routing problem* (IRP), recorrendo a modelos matemáticos em programação linear inteira e mista (PLIM). Na presente dissertação abordaram-se duas políticas de reabastecimento ML e OU, apresentando-se para cada uma delas dois modelos base, Fluxos e MTZ, os quais podem ser resolvidos recorrendo a um *solver* comercial.

Para cada política de reabastecimento e com vista a comparar os modelos propostos, quer em termos da qualidade da relaxação linear e do tempo computacional necessário para a obtenção da solução ótima, foi realizada uma experiência computacional recorrendo a um conjunto de instâncias da literatura, [3], que foram adaptadas para o problema em questão. Para cada instância considerou-se o alargamento do horizonte temporal de  $H=3$  para  $H=6$  e  $H=10$  a fim de estudar o comportamento dos modelos. Referir ainda que nas instâncias geradas considerou-se um número de clientes  $n=5k$ , sendo  $k=1,2,\dots,10$ , sendo que a sua procura foi constante ao longo do horizonte temporal  $H$ .

A partir dos modelos propostos sob as políticas de reabastecimento, foram realizados testes com base na relaxação linear que permitiram obter o limite inferior do valor ótimo e também os tempos de execução dos mesmos. Segundo os mesmos critérios, estudou-se também a eficiência dos modelos em cada política de reabastecimento.

Os resultados obtidos na primeira análise mostraram que o modelo Fluxos é o modelo que fornece melhores limites inferiores para as duas políticas de reabastecimento ML e OU e que o modelo MTZ é o que consome menos tempo computacional na resolução da respetiva relaxação linear para as mesmas políticas. Na obtenção da solução ótima do problema, o modelo Fluxos mostra-se mais eficiente para ambas as políticas ML e OU, sendo que consegue resolver mais instâncias com um maior número de clientes.

De forma a tornar os modelos propostos o mais eficientes possível, fortaleceu-se a restrição referente à entrega de inventário não exceder a capacidade máxima do veículo e substitui-se por uma desigualdade válida. Os resultados obtidos mostraram que os modelos FluxosY e MTZ-Y fornecem ligeiramente melhores limites inferiores para as duas políticas de reabastecimento considerando o aumento do número de clientes e do horizonte temporal. Relativamente à obtenção da solução ótima, os modelos FluxosY e MTZ-Y para as duas políticas de reabastecimento são mais eficientes, apresentando tempos de computação inferiores aos dos modelos iniciais, sendo essa diferença visível quer aumentando o número de clientes, quer alargando o horizonte temporal. Referir ainda que após o fortalecimento da restrição, o modelo MTZ-Y conseguiu resolver o problema inteiro para mais instâncias do que o respetivo modelo original à medida que o número de clientes é aumentado.

Na experiência computacional referida antes, verificou-se que para diversas instâncias a solução

---

ótima nas políticas ML e OU apresentava rotas simétricas em diferentes períodos  $t$  do horizonte temporal  $H$ . De modo a quebrar essas simetrias nas rotas e tornar os modelos mais eficientes, foi adicionada a restrição de quebra de simetrias aos modelos FluxosY e MTZ-Y para ambas as políticas de reabastecimento. Assim, os resultados obtidos mostraram que os modelos FluxosY-QS e MTZ-Y-QS fornecem os mesmos limites inferiores que os modelos anteriores FluxosY e MTZ-Y. No entanto, a eficiência dos modelos FluxosY-QS e MTZ-Y-QS para cada política de reabastecimento piorou com a introdução da nova restrição de quebras de simetrias, quer para o aumento do número de clientes, quer para o aumento no horizonte temporal. Esse aumento do tempo de computação é notório no modelo MTZ-Y-QS, onde não se conseguiu obter nenhuma solução para as instâncias com 50 clientes devido à falta de memória do computador.

Com base em todos os testes realizados e nos resultados obtidos, conclui-se que os melhores limites inferiores são conseguidos pelos modelos FluxosY e FluxosY-QS nas duas políticas, sendo que a política ML consegue obter menores valores de Gap médio comparativamente à política OU. Em relação à eficiência dos modelos, é o modelo FluxosY que necessita de um menor tempo de computação para obter a solução ótima do problema para as duas políticas. Comparando entre as políticas de reabastecimento, para a ML o modelo é resolvido mais rapidamente mantendo-se a tendência quando se aumenta o número de clientes e se alarga o horizonte temporal.

Propôs-se ainda nesta dissertação uma nova política de reabastecimento denominada por NP. Esta nova política pretende que cada cliente tenha no final do seu horizonte temporal o mesmo nível de inventario que tinham no início do horizonte temporal. Com base nos resultados obtidos sob o modelo FluxosY, a política NP inicialmente começa por apresentar piores limites inferiores juntamente com a política OU. No entanto, com o aumentar do horizonte temporal, essa diferença deixa de ser notória acabando assim por a política NP apresentar limites inferiores semelhantes aos obtidos na política ML. Quando se trata da obtenção da solução do problema, a nova política consegue ser a mais eficiente das três, considerando o aumento do número de clientes e do horizonte temporal.

Como propostas para desenvolvimento futuro, ainda existem aspetos que podem ser melhorados nos modelos propostos. Primeiro aspeto passaria por melhorar a eficiência dos modelos com implementação de novas desigualdades válidas de forma a conseguir resolver instâncias de maiores dimensões ou para maiores horizontes temporais. Outro aspeto interessante seria aplicar os modelos proposto a problemas onde a procura não fosse constante ao longo do horizonte temporal, isto é, considerar uma procura sazonal ou uma procura não totalmente conhecida inicialmente mas gradualmente revelada ao longo do horizonte temporal (problema de roteamento de inventário dinâmico e estocástico, DSIRP). Por fim, também seria interessante estudar o comportamento dos modelos propostos para as políticas de reabastecimento ML, OU e NP considerando o uso de vários veículos.

# Bibliografia

- [1] <https://www.leandro-coelho.com/instances/inventory-routing/>.
- [2] Claudia Archetti, Luca Bertazzi, Alain Hertz, and M Grazia Speranza. A hybrid heuristic for an inventory routing problem. *INFORMS Journal on Computing*, 24(1):101–116, 2012.
- [3] Claudia Archetti, Luca Bertazzi, Gilbert Laporte, and Maria Grazia Speranza. A branch-and-cut algorithm for a vendor-managed inventory-routing problem. *Transportation science*, 41(3):382–391, 2007.
- [4] Claudia Archetti, Nicola Bianchessi, Stefan Irnich, and M Grazia Speranza. Formulations for an inventory routing problem. *International Transactions in Operational Research*, 21(3):353–374, 2014.
- [5] Claudia Archetti, Natashia Boland, and M Grazia Speranza. A matheuristic for the multivehicle inventory routing problem. *INFORMS Journal on Computing*, 29(3):377–387, 2017.
- [6] Claudia Archetti and M Grazia Speranza. The inventory routing problem: the value of integration. *International Transactions in Operational Research*, 23(3):393–407, 2016.
- [7] Luca Bertazzi, Giuseppe Paletta, and M Grazia Speranza. Deterministic order-up-to level policies in an inventory routing problem. *Transportation Science*, 36(1):119–132, 2002.
- [8] Luca Bertazzi, Martin Savelsbergh, and Maria Grazia Speranza. Inventory routing. In *The vehicle routing problem: latest advances and new challenges*, pages 49–72. Springer, 2008.
- [9] Luca Bertazzi and M Grazia Speranza. Inventory routing problems: an introduction. *EURO Journal on Transportation and Logistics*, 1(4):307–326, 2012.
- [10] Luca Bertazzi and M Grazia Speranza. Inventory routing problems with multiple customers. *EURO Journal on Transportation and Logistics*, 2(3):255–275, 2013.
- [11] Ann Campbell, Lloyd Clarke, Anton Kleywegt, and Martin Savelsbergh. The inventory routing problem. In *Fleet management and logistics*, pages 95–113. Springer, 1998.
- [12] Ann M Campbell, Lloyd W Clarke, and Martin WP Savelsbergh. Inventory routing in practice. In *The vehicle routing problem*, pages 309–330. SIAM, 2002.
- [13] Leandro C Coelho, Jean-François Cordeau, and Gilbert Laporte. The inventory-routing problem with transshipment. *Computers & Operations Research*, 39(11):2537–2548, 2012.
- [14] Leandro C Coelho, Jean-François Cordeau, and Gilbert Laporte. Thirty years of inventory routing. *Transportation Science*, 48(1):1–19, 2013.

- [15] Leandro C Coelho and Gilbert Laporte. Improved solutions for inventory-routing problems through valid inequalities and input ordering. *International Journal of Production Economics*, 155:391–397, 2014.
- [16] Leandro C Coelho and Gilbert Laporte. An optimised target-level inventory replenishment policy for vendor-managed inventory systems. *International Journal of Production Research*, 53(12):3651–3660, 2015.
- [17] Oğuz Solyalı and Haldun Süral. A branch-and-cut algorithm using a strong formulation and an a priori tour-based heuristic for an inventory-routing problem. *Transportation Science*, 45(3):335–345, 2011.



## **Apêndice A**

# **Resultados Completos**

Tabela A.1: Resultados obtidos pelos modelos Fluxos, FluxosY e FluxosY-QS sob a política ML em H=3.

Política ML										
H=3										
Instâncias	P.I.	Fluxos			FluxosY			FluxosY-QS		
		CPU (PI)	%GAP	CPU (RL)	CPU (PI)	%GAP	CPU (RL)	CPU (PI)	%GAP	CPU (RL)
5_1	1 870,88	0,12	26,91%	0,02	0,09	26,76%	0,02			
5_2	1 553,82	0,10	30,12%	0,02	0,07	28,27%	0,00			
5_3	2 610,70	0,17	25,03%	0,00	0,09	23,57%	0,00			
5_4	1 823,15	0,13	27,58%	0,00	0,13	24,47%	0,00			
5_5	1 821,42	0,13	29,93%	0,00	0,08	25,42%	0,00			
10_1	3 726,94	0,50	18,32%	0,00	0,45	18,13%	0,02	0,38	18,13%	0,02
10_2	3 861,85	1,25	27,57%	0,00	0,42	24,37%	0,00	0,61	24,37%	0,02
10_3	3 414,59	0,25	23,39%	0,02	0,23	22,57%	0,00	0,21	22,57%	0,02
10_4	3 342,05	0,24	9,64%	0,02	0,18	8,83%	0,00	0,20	8,83%	0,02
10_5	3 892,44	0,90	18,77%	0,00	0,53	17,31%	0,02	0,80	17,31%	0,02
15_1	4 636,33	1,90	14,03%	0,03	1,42	13,87%	0,02			
15_2	4 522,63	3,66	20,82%	0,02	1,54	20,34%	0,03			
15_3	5 211,67	1,07	18,07%	0,03	0,53	17,81%	0,02			
15_4	4 216,68	4,02	20,40%	0,03	2,13	19,01%	0,02			
15_5	4 072,03	4,35	19,32%	0,02	1,21	17,76%	0,03			
20_1	5 593,01	1,14	10,27%	0,06	0,98	9,64%	0,06	1,22	9,64%	0,06
20_2	5 812,35	7,01	20,39%	0,05	2,61	20,27%	0,05	3,09	20,27%	0,05
20_3	6 000,97	2,99	13,69%	0,05	1,15	13,69%	0,05	1,43	13,69%	0,05
20_4	5 907,68	13,57	20,61%	0,05	14,61	20,38%	0,05	16,60	20,38%	0,05
20_5	6 436,13	8,63	17,03%	0,06	3,47	16,12%	0,06	3,54	16,12%	0,06
25_1	6 758,89	11,67	18,93%	0,13	5,15	18,04%	0,11			
25_2	7 154,75	18,96	13,91%	0,11	14,01	13,83%	0,11			
25_3	7 607,39	10,91	15,35%	0,14	3,83	15,06%	0,13			
25_4	6 981,14	13,54	15,29%	0,08	19,85	14,77%	0,09			
25_5	8 058,61	5,79	12,95%	0,11	2,15	11,69%	0,09			
30_1	9 669,76	18,38	12,44%	0,14	23,34	12,37%	0,16	10,88	12,37%	0,17
30_2	8 839,33	30,73	14,41%	0,16	21,98	13,70%	0,14	32,89	13,70%	0,16
30_3	9 671,61	12,92	12,64%	0,16	9,35	12,51%	0,17	8,84	12,51%	0,17
30_4	7 946,38	45,61	15,80%	0,14	57,23	15,66%	0,14	48,72	15,66%	0,16
30_5	7 826,27	12,86	11,95%	0,16	13,24	11,91%	0,16	7,92	11,91%	0,17
35_1	9 385,82	25,36	14,14%	0,22	16,90	13,80%	0,20			
35_2	8 546,09	45,53	14,80%	0,19	29,61	14,47%	0,20			
35_3	10 963,77	34,15	11,78%	0,22	25,71	11,29%	0,20			
35_4	8 357,92	28,79	13,71%	0,20	20,54	13,60%	0,20			
35_5	8 733,79	26,56	11,79%	0,22	7,75	11,62%	0,22			
40_1	10 657,28	54,09	12,39%	0,30	31,86	12,21%	0,25	32,00	12,21%	0,30
40_2	9 202,74	181,44	15,43%	0,25	426,79	15,14%	0,25	224,06	15,14%	0,27
40_3	10 855,53	71,36	14,34%	0,27	53,23	14,18%	0,27	23,16	14,18%	0,25
40_4	9 208,30	31,17	13,36%	0,23	23,10	13,31%	0,25	22,68	13,31%	0,25
40_5	10 403,09	39,07	12,29%	0,25	50,06	12,01%	0,27	67,98	12,01%	0,28
45_1	11 319,47	83,23	11,31%	0,31	121,56	11,29%	0,28			
45_2	10 513,61	53,12	11,92%	0,34	19,94	11,79%	0,31			
45_3	11 762,18	58,21	10,95%	0,30	31,15	10,76%	0,30			
45_4	10 936,09	81,89	13,09%	0,31	62,42	12,86%	0,34			
45_5	10 829,11	642,87	11,63%	0,31	332,85	11,55%	0,28			
50_1	11 607,98	155,74	10,82%	0,45	210,56	10,52%	0,52	191,35	10,52%	0,50
50_2	12 092,36	230,01	12,79%	0,39	302,21	12,23%	0,42	269,77	12,23%	0,47
50_3	12 240,80	170,47	13,25%	0,42	214,80	12,96%	0,44	245,98	12,96%	0,53
50_4	13 126,73	459,66	10,54%	0,42	213,87	10,36%	0,45	206,03	10,36%	0,53
50_5	12 396,34	123,04	11,96%	0,45	83,95	11,90%	0,50	270,06	11,90%	0,59

## APÊNDICE A. RESULTADOS COMPLETOS

Tabela A.2: Resultados obtidos pelos modelos MTZ, MTZ-Y e MTZ-Y-QS sob a política ML em H=3.

Política ML										
H=3										
Instâncias	P.I.	MTZ			MTZ-Y			MTZ-Y-QS		
		CPU (PI)	%GAP	CPU (RL)	CPU (PI)	%GAP	CPU (RL)	CPU (PI)	%GAP	CPU (RL)
5_1	1 870,88	0,07	28,51%	0,00	0,09	28,15%	0,00			
5_2	1 553,82	0,08	31,52%	0,02	0,07	30,15%	0,00			
5_3	2 610,70	0,10	26,79%	0,00	0,09	26,02%	0,00			
5_4	1 823,15	0,11	32,15%	0,02	0,14	24,88%	0,00			
5_5	1 821,42	0,12	32,92%	0,00	0,08	25,47%	0,02			
10_1	3 726,94	0,42	21,84%	0,00	0,32	21,67%	0,00	0,46	21,67%	0,00
10_2	3 861,85	3,07	33,63%	0,02	0,31	25,97%	0,02	0,31	25,97%	0,02
10_3	3 414,59	0,27	25,29%	0,00	0,21	23,55%	0,00	0,20	23,55%	0,02
10_4	3 342,05	0,25	12,38%	0,00	0,24	11,90%	0,00	0,32	11,90%	0,00
10_5	3 892,44	0,63	20,71%	0,00	0,25	18,58%	0,00	0,42	18,58%	0,00
15_1	4 636,33	0,68	15,39%	0,00	0,58	15,22%	0,00			
15_2	4 522,63	4,19	24,09%	0,02	3,86	22,76%	0,00			
15_3	5 211,67	0,60	20,40%	0,00	0,49	18,99%	0,00			
15_4	4 216,68	9,74	23,69%	0,00	2,84	20,11%	0,00			
15_5	4 072,03	7,14	23,38%	0,00	1,59	19,81%	0,02			
20_1	5593,01	2,27	14,40%	0,00	1,34	12,42%	0,00	1,43	12,42%	0,00
20_2	5 812,35	8,84	21,55%	0,00	3,81	21,40%	0,02	6,13	21,40%	0,00
20_3	6 000,97	1,47	15,56%	0,02	1,07	14,80%	0,02	1,25	14,80%	0,02
20_4	5 907,68	9871,89	22,95%	0,02	1 227,89	22,89%	0,00	1 445,55	22,89%	0,02
20_5	6 436,13	692,85	18,89%	0,02	207,49	18,52%	0,02	191,75	18,52%	0,02
25_1	6 758,89	350,85	20,81%	0,02	17,84	18,81%	0,02			
25_2	7 154,75	216,08	15,66%	0,02	94,57	15,59%	0,02			
25_3	7 607,39	69,06	17,81%	0,02	19,44	17,38%	0,00			
25_4	6 981,14	235,88	17,04%	0,02	10,54	15,55%	0,00			
25_5	8 058,61	7197,58	15,82%	0,00	4,34	12,30%	0,02			
30_1	9 669,76	284,08	14,19%	0,05	258,14	14,05%	0,03	218,54	14,05%	0,02
30_2	8 839,33	9909,85	15,94%	0,08	14,28	14,16%	0,02	20,72	14,16%	0,02
30_3	9 671,61	36,67	13,42%	0,02	8,91	13,10%	0,02	10,48	13,10%	0,02
30_4	7 946,38	1877,95	17,02%	0,02	84,06	16,45%	0,03	66,90	16,45%	0,02
30_5	7 826,27	16,97	13,37%	0,03	15,44	13,28%	0,02	15,37	13,28%	0,02
35_1	9 385,82	356,35	15,28%	0,03	47,44	15,12%	0,03			
35_2	8 546,09	3181,12	16,09%	0,03	31,55	15,36%	0,03			
35_3	10 963,77	**	13,52%	0,03	86,94	12,04%	0,03			
35_4	8 357,92	110,43	15,21%	0,03	34,37	15,15%	0,03			
35_5	8 733,79	127,93	13,66%	0,03	23,56	13,43%	0,03			
40_1	10 657,28	**	13,37%	0,06	631,84	13,12%	0,05	861,92	13,12%	0,05
40_2	9 202,74	**	17,33%	0,03	**	16,66%	0,05	**	16,66%	0,05
40_3	10 855,53	**	15,07%	0,03	26,06	14,59%	0,05	43,87	14,59%	0,05
40_4	9 208,30	**	14,42%	0,03	32,73	14,34%	0,03	50,57	14,34%	0,03
40_5	10 403,09	**	13,56%	0,03	39,28	13,00%	0,05	66,46	13,00%	0,03
45_1	11 319,47	**	11,88%	0,03	418,17	11,79%	0,05			
45_2	10 513,61	**	13,56%	0,03	34,84	13,24%	0,05			
45_3	11 762,18	**	11,78%	0,03	47,17	11,24%	0,05			
45_4	10 936,09	**	14,24%	0,05	397,71	13,86%	0,05			
45_5	10 829,11	**	12,37%	0,03	**	12,30%	0,06			
50_1	11 607,98	**	12,46%	0,05	2 219,89	11,65%	0,06	1 647,34	11,65%	0,06
50_2	12 092,36	**	14,04%	0,05	558,89	12,67%	0,08	411,75	12,67%	0,08
50_3	12 240,80	**	14,12%	0,06	622,78	13,32%	0,08	335,38	13,32%	0,06
50_4	13 126,73	**	11,73%	0,05	104,33	11,14%	0,06	106,67	11,14%	0,05
50_5	12 396,34	**	13,52%	0,05	**	13,52%	0,06	**	13,52%	0,05

Tabela A.3: Resultados obtidos pelos modelos Fluxos, FluxosY e FluxosY-QS sob a política ML em H=6.

Política ML										
H=6										
Instâncias	P.I.	Fluxos			FluxosY			FluxosY-QS		
		CPU (PI)	%GAP	CPU (RL)	CPU (PI)	%GAP	CPU (RL)	CPU (PI)	%GAP	CPU (RL)
5_1	4 347,47	1,28	25,21%	0,02	0,27	24,87%	0,00			
5_2	3 695,24	1,89	29,52%	0,00	0,39	28,17%	0,00			
5_3	6 103,22	1,41	25,03%	0,00	0,36	23,40%	0,00			
5_4	3 999,93	0,71	22,73%	0,02	0,35	20,03%	0,00			
5_5	3 934,04	0,65	22,46%	0,00	0,30	16,25%	0,00			
10_1	8 221,66	20,03	18,40%	0,02	1,69	18,02%	0,02	1,77	18,02%	0,02
10_2	8 468,19	9,12	24,05%	0,03	7,09	19,76%	0,02	3,91	19,76%	0,03
10_3	7 663,52	10,98	21,57%	0,03	2,26	20,30%	0,03	3,18	20,30%	0,02
10_4	8 002,81	8,13	17,17%	0,02	1,04	16,27%	0,02	1,09	16,27%	0,03
10_5	8 631,39	8,07	20,05%	0,02	5,09	18,27%	0,02	7,29	18,27%	0,02
15_1	10 435,55	20,14	16,63%	0,08	24,35	16,41%	0,08			
15_2	10 219,20	20,00	23,92%	0,08	27,13	23,57%	0,08			
15_3	11 526,52	21,85	17,10%	0,09	23,09	16,77%	0,06			
15_4	9 480,17	16,58	23,27%	0,08	22,71	21,37%	0,08			
15_5	8 964,63	21,19	18,79%	0,08	18,89	17,19%	0,08			
20_1	12 756,78	48,94	15,61%	0,16	49,25	14,71%	0,16	57,10	14,71%	0,14
20_2	12 608,58	46,78	21,50%	0,14	46,47	21,31%	0,16	40,69	21,31%	0,17
20_3	13 764,95	25,24	19,06%	0,13	25,60	19,06%	0,14	23,94	19,06%	0,16
20_4	12 893,64	60,61	20,89%	0,16	68,98	20,61%	0,14	93,81	20,61%	0,16
20_5	14 294,08	58,33	19,31%	0,14	71,61	17,93%	0,16	99,69	17,93%	0,17
25_1	15 015,41	117,46	20,69%	0,23	152,94	19,89%	0,22			
25_2	15 806,03	238,63	15,79%	0,24	183,20	15,53%	0,23			
25_3	16 848,69	120,57	18,22%	0,24	142,36	17,70%	0,34			
25_4	15 388,51	70,39	17,71%	0,23	73,12	17,09%	0,20			
25_5	17 600,22	152,52	14,52%	0,24	225,18	12,57%	0,22			
30_1	20 819,91	604,09	14,05%	0,31	499,73	13,99%	0,33	852,82	13,99%	0,33
30_2	18 856,01	819,69	14,06%	0,30	1 295,26	13,16%	0,30	1 681,65	13,16%	0,33
30_3	20 773,69	423,17	14,09%	0,30	427,81	13,89%	0,30	428,85	13,89%	0,31
30_4	16 924,94	255,26	15,49%	0,31	362,16	15,17%	0,28	358,91	15,17%	0,31
30_5	17 253,12	4 031,42	15,23%	0,31	2 145,33	15,12%	0,31	3 510,28	15,12%	0,33
35_1	20 424,69	8 327,96	16,82%	0,61	15 444,06	16,41%	0,38			
35_2	18 487,29	808,97	15,41%	0,39	384,07	14,94%	0,38			
35_3	**	**	**	**	**	**	**			
35_4	18 386,39	5 147,14	16,18%	0,41	4 018,45	16,04%	0,41			
35_5	19 467,72	3 941,57	16,10%	0,49	1 957,77	15,86%	0,44			

## APÊNDICE A. RESULTADOS COMPLETOS

Tabela A.4: Resultados obtidos pelos modelos MTZ, MTZY e MTZ-Y-QS sob a política ML em H=6.

Política ML										
H=6										
Instâncias	P.I.	MTZ			MTZ-Y			MTZ-Y-QS		
		CPU (PI)	%GAP	CPU (RL)	CPU (PI)	%GAP	CPU (RL)	CPU (PI)	%GAP	CPU (RL)
5_1	4 347,47	0,51	26,57%	0,02	0,42	26,08%	0,02			
5_2	3 695,24	0,70	30,23%	0,00	0,52	29,87%	0,00			
5_3	6 103,22	2,35	27,51%	0,02	1,23	26,32%	0,00			
5_4	3 999,93	0,69	27,36%	0,02	0,54	20,59%	0,00			
5_5	3 934,04	5,82	26,73%	0,00	0,30	16,72%	0,00			
10_1	8 221,66	1298,35	22,55%	0,16	322,60	21,86%	0,02	198,41	21,86%	0,02
10_2	8 468,19	**	31,77%	0,00	5,20	21,59%	0,02	4,97	21,59%	0,02
10_3	7 663,52	503,65	24,02%	0,00	5,74	21,59%	0,02	4,75	21,59%	0,00
10_4	8 002,81	81,86	19,95%	0,02	5,97	19,43%	0,02	6,24	19,43%	0,00
10_5	8 631,39	410,57	21,35%	0,00	4,20	19,50%	0,02	4,11	19,50%	0,02
15_1	10 435,55	**	18,31%	0,02	832,93	17,65%	0,02			
15_2	10 219,20	**	26,95%	0,00	50 326,74	26,21%	0,00			
15_3	11 526,52	**	20,01%	0,00	164,73	18,30%	0,02			
15_4	9 480,17	**	26,72%	0,02	47 494,35	22,34%	0,02			
15_5	8 964,63	**	23,39%	0,02	52,55	19,81%	0,02			
20_1	12 756,78	**	20,34%	0,03	**	17,75%	0,02	**	17,75%	0,03
20_2	12 608,58	**	22,87%	0,03	**	22,70%	0,02	**	22,70%	0,02
20_3	13 764,95	**	20,97%	0,02	**	20,10%	0,03	353,08	20,10%	0,03
20_4	12 893,64	**	23,18%	0,03	**	23,06%	0,02	**	23,06%	0,03
20_5	14 294,08	**	21,95%	0,02	**	21,08%	0,02	**	21,08%	0,02
25_1	15 015,41	**	22,81%	0,03	**	20,82%	0,03			
25_2	15 806,03	**	17,79%	0,03	**	17,73%	0,05			
25_3	16 848,69	**	20,85%	0,03	**	19,98%	0,03			
25_4	15 388,51	**	19,61%	0,03	**	17,95%	0,05			
25_5	17 600,22	**	18,17%	0,03	**	13,25%	0,05			
30_1	20 819,91	**	16,15%	0,06	**	15,95%	0,05	**	15,95%	0,05
30_2	18 856,01	**	15,78%	0,05	**	13,65%	0,09	**	13,65%	0,08
30_3	20 773,69	**	15,16%	0,03	**	14,73%	0,05	**	14,73%	0,05
30_4	16 924,94	**	16,87%	0,05	**	15,98%	0,06	**	15,98%	0,06
30_5	17 253,12	**	16,62%	0,05	**	16,53%	0,05	**	16,53%	0,05
35_1	20 424,69	**	18,14%	0,06	**	17,73%	0,06			
35_2	18 487,29	**	16,74%	0,05	**	15,92%	0,06			
35_3	**	**	**	**	**	**	**			
35_4	18 386,39	**	17,83%	0,05	**	17,71%	0,05			
35_5	19 467,72	**	18,26%	0,06	**	17,83%	0,06			

Tabela A.5: Resultados obtidos pelos modelos Fluxos, FluxosY e FluxosY-QS sob a política ML em H=10.

Política ML										
H=10										
Instâncias	P.I.	Fluxos			FluxosY			FluxosY-QS		
		CPU (PI)	%GAP	CPU (RL)	CPU (PI)	%GAP	CPU (RL)	CPU (PI)	%GAP	CPU (RL)
5_1	7 489,13	6,08	23,05%	0,02	1,36	22,63%	0,00			
5_2	6 398,69	5,32	27,50%	0,00	1,98	26,20%	0,00			
5_3	10 502,08	7,23	23,20%	0,00	1,28	21,47%	0,02			
5_4	6 913,81	4,23	21,21%	0,02	1,75	18,60%	0,02			
5_5	6 652,26	4,32	18,55%	0,02	0,91	11,64%	0,02			
10_1	14 241,80	398,91	18,54%	0,05	29,50	18,06%	0,05	68,01	18,06%	0,05
10_2	14 393,30	74,05	21,74%	0,05	21,19	16,94%	0,05	23,94	16,94%	0,05
10_3	13 129,40	113,73	19,91%	0,05	31,06	18,42%	0,05	27,34	18,42%	0,06
10_4	13 679,93	52,97	16,49%	0,05	17,29	15,58%	0,05	21,15	15,58%	0,05
10_5	14 674,10	43,31	19,07%	0,05	20,54	17,18%	0,03	22,16	17,18%	0,03
15_1	17 648,00	71,05	15,00%	0,16	82,83	14,70%	0,14			
15_2	17 500,79	141,04	23,65%	0,16	96,08	23,30%	0,17			
15_3	19 648,30	141,08	15,69%	0,16	110,90	15,39%	0,16			
15_4	16 181,97	58,74	22,76%	0,17	83,49	20,70%	0,14			
15_5	15 412,82	164,08	18,34%	0,14	167,37	16,72%	0,13			
20_1	21 714,48	1 701,17	15,15%	0,38	3 068,10	14,12%	0,27	814,21	14,12%	0,30
20_2	21 334,86	797,83	20,76%	0,28	640,89	20,54%	0,28	868,87	20,54%	0,30
20_3	23 098,95	98,13	17,33%	0,28	125,04	17,33%	0,27	118,92	17,33%	0,28
20_4	21 999,67	3 660,32	20,33%	0,33	3 106,18	20,02%	0,27	2 675,26	20,02%	0,30
20_5	24 651,39	19 093,02	19,82%	0,30	3 134,60	18,26%	0,28	1 526,42	18,26%	0,31

Tabela A.6: Resultados obtidos pelos modelos MTZ, MTZ-Y e MTZ-Y-QS sob a política ML em H=10.

Política ML										
H=10										
Instâncias	P.I.	MTZ			MTZ-Y			MTZ-Y-QS		
		CPU (PI)	%GAP	CPU (RL)	CPU (PI)	%GAP	CPU (RL)	CPU (PI)	%GAP	CPU (RL)
5_1	7 489,13	5,54	24,26%	0,00	6,57	23,73%	0,00			
5_2	6 398,69	20,58	28,15%	0,02	4,31	27,33%	0,00			
5_3	10 502,08	167,19	25,98%	0,02	26,48	24,61%	0,00			
5_4	6 913,81	13,63	25,80%	0,00	2,08	19,21%	0,00			
5_5	6 652,26	793,41	23,10%	0,02	2,47	12,26%	0,00			
10_1	14 241,80	**	22,61%	0,02	**	21,77%	0,02	**	21,77%	0,02
10_2	14 393,30	**	30,10%	0,00	**	18,84%	0,02	**	18,84%	0,02
10_3	13 129,40	**	22,41%	0,00	**	19,45%	0,02	**	19,45%	0,02
10_4	13 679,93	**	19,30%	0,02	**	18,72%	0,02	**	18,72%	0,02
10_5	14 674,10	**	20,20%	0,00	**	18,40%	0,02	**	18,40%	0,02
15_1	17 648,00	**	16,73%	0,05	**	15,87%	0,05			
15_2	17 500,79	**	26,70%	0,02	**	26,12%	0,03			
15_3	19 648,30	**	18,77%	0,03	**	16,98%	0,06			
15_4	16 181,97	**	26,35%	0,03	**	21,51%	0,05			
15_5	15 412,82	**	23,02%	0,02	**	19,42%	0,03			
20_1	21 714,48	**	20,22%	0,03	**	17,33%	0,08	**	17,33%	0,05
20_2	21 334,86	**	22,20%	0,03	**	22,04%	0,05	**	22,04%	0,03
20_3	23 098,95	**	19,20%	0,03	**	18,37%	0,05	**	18,37%	0,05
20_4	21 999,67	**	22,56%	0,03	**	22,50%	0,05	**	22,50%	0,06
20_5	24 651,39	**	22,68%	0,03	**	21,64%	0,05	**	21,64%	0,05

## APÊNDICE A. RESULTADOS COMPLETOS

Tabela A.7: Resultados obtidos pelos modelos Fluxos, FluxosY e FluxosY-QS sob a política OU em H=3.

Política OU										
H=3										
		Fluxos			FluxosY			FluxosY-QS		
Instâncias	P.L	CPU (PI)	%GAP	CPU (RL)	CPU (PI)	%GAP	CPU (RL)	CPU (PI)	%GAP	CPU (RL)
5_1	1 912,34	0,19	28,49%	0,17	0,10	28,34%	0,17			
5_2	1 745,81	0,16	37,81%	0,00	0,13	36,16%	0,00			
5_3	2 903,14	0,22	32,58%	0,00	0,13	31,27%	0,00			
5_4	1 876,55	0,19	29,64%	0,02	0,10	26,62%	0,00			
5_5	2 013,54	0,14	36,61%	0,00	0,12	32,53%	0,00			
10_1	4 186,95	5,42	27,30%	0,02	0,66	27,13%	0,00	0,59	27,13%	0,00
10_2	4 160,41	2,01	32,76%	0,00	0,61	29,80%	0,00	0,52	29,80%	0,02
10_3	3 673,03	0,67	28,77%	0,00	0,79	28,01%	0,02	0,46	28,01%	0,02
10_4	3 755,65	1,02	19,59%	0,02	0,41	18,87%	0,02	0,41	18,87%	0,02
10_5	4 224,27	3,92	25,13%	0,00	1,33	23,76%	0,00	0,85	23,76%	0,02
15_1	4 760,47	4,12	16,27%	0,03	1,58	16,12%	0,02			
15_2	4 900,33	6,75	26,87%	0,03	7,66	26,43%	0,03			
15_3	5 622,06	8,29	24,05%	0,03	3,10	23,81%	0,03			
15_4	4 466,66	5,52	24,85%	0,03	3,55	23,55%	0,03			
15_5	4 415,35	7,41	25,55%	0,03	6,55	24,05%	0,02			
20_1	6 087,81	17,24	17,55%	0,09	16,66	16,99%	0,06	8,10	16,99%	0,05
20_2	6 109,64	12,26	24,26%	0,05	21,09	24,15%	0,05	15,41	24,15%	0,05
20_3	6 078,09	4,55	14,78%	0,05	1,34	14,77%	0,05	1,09	14,77%	0,03
20_4	6 005,80	13,53	21,84%	0,05	14,47	21,62%	0,05	10,88	21,62%	0,05
20_5	6 967,70	15,78	23,36%	0,06	7,59	22,52%	0,06	10,58	22,52%	0,06
25_1	7 188,73	23,55	23,78%	0,14	24,98	22,92%	0,13			
25_2	7 655,90	45,73	19,54%	0,13	43,16	19,47%	0,14			
25_3	8 068,57	26,29	20,18%	0,13	12,34	19,91%	0,13			
25_4	7 206,07	17,38	17,92%	0,09	15,48	17,42%	0,13			
25_5	8 834,87	86,55	20,60%	0,11	50,07	19,45%	0,09			
30_1	10 238,45	105,68	17,30%	0,14	88,61	17,23%	0,16	96,61	17,23%	0,19
30_2	9 249,37	91,35	18,20%	0,16	92,50	17,52%	0,14	92,37	17,52%	0,16
30_3	10 058,51	34,32	16,00%	0,16	51,02	15,87%	0,17	63,19	15,87%	0,17
30_4	8 187,63	54,16	18,28%	0,14	55,53	18,15%	0,14	98,33	18,15%	0,17
30_5	8 231,00	58,65	16,27%	0,16	62,05	16,23%	0,16	68,62	16,23%	0,17
35_1	9 710,63	86,21	17,01%	0,20	153,85	16,68%	0,25			
35_2	8 786,20	129,45	17,12%	0,20	80,63	16,79%	0,19			
35_3	11 598,89	390,93	16,61%	0,21	292,43	16,15%	0,20			
35_4	8 895,50	240,80	18,90%	0,23	286,75	18,79%	0,19			
35_5	9 081,84	49,61	15,14%	0,22	31,71	14,98%	0,22			
40_1	11 298,93	1 643,21	17,36%	0,33	990,38	17,19%	0,27	589,00	17,19%	0,28
40_2	9 607,47	839,66	19,00%	0,25	819,40	18,72%	0,24	478,72	18,72%	0,25
40_3	11 363,73	579,45	18,16%	0,27	446,14	18,01%	0,24	267,76	18,01%	0,25
40_4	9 539,34	131,90	16,34%	0,24	248,09	16,29%	0,25	252,10	16,29%	0,25
40_5	10 869,48	126,75	16,06%	0,25	189,23	15,78%	0,25	159,02	15,78%	0,28
45_1	11 801,57	974,71	14,93%	0,30	1117,62	14,90%	0,31			
45_2	11 047,35	409,35	16,17%	0,33	698,19	16,05%	0,27			
45_3	12 235,15	437,93	14,37%	0,28	322,33	14,18%	0,25			
45_4	11 458,43	1 861,25	17,05%	0,31	1064,57	16,84%	0,30			
45_5	11 080,39	560,33	13,61%	0,28	385,14	13,53%	0,25			
50_1	12 266,51	**	**	**	5883,58	16,32%	0,45	5 108,74	15,31%	0,52
50_2	12 544,50	3 027,77	15,93%	0,41	1737,53	15,39%	0,38	2 813,33	15,39%	0,47
50_3	12 709,04	4 080,77	16,42%	0,44	3692,80	16,14%	0,39	3 219,22	16,14%	0,48
50_4	13 773,25	6 882,81	14,74%	0,42	11385,95	14,57%	0,42	11 289,86	14,57%	0,48
50_5	12 922,67	5 987,49	15,52%	0,47	2830,71	15,46%	0,49	2 898,64	15,46%	0,52

Tabela A.8: Resultados obtidos pelos modelos MTZ, MTZ-Y e MTZ-Y-QS sob a política OU em H=3.

Política OU										
H=3										
Instâncias	P.I.	MTZ			MTZ-Y			MTZ-Y-QS		
		CPU (PI)	%GAP	CPU (RL)	CPU (PI)	%GAP	CPU (RL)	CPU (PI)	%GAP	CPU (RL)
5_1	1 912,34	0,10	30,06%	0,00	0,84	29,71%	0,03			
5_2	1 745,81	0,11	39,05%	0,00	0,11	37,83%	0,00			
5_3	2 903,14	0,13	34,16%	0,00	0,16	33,17%	0,02			
5_4	1 876,55	0,13	34,08%	0,00	0,12	27,01%	0,02			
5_5	2 013,54	0,18	39,32%	0,02	0,10	32,58%	0,00			
10_1	4 186,95	17,15	30,43%	0,00	4,99	30,28%	0,02	4,91	30,28%	0,02
10_2	4 160,41	11,01	38,39%	0,02	0,53	31,28%	0,00	0,66	31,28%	0,00
10_3	3 673,03	2,93	30,55%	0,00	0,34	28,93%	0,00	0,53	28,93%	0,00
10_4	3 755,65	1,77	22,03%	0,00	0,60	21,60%	0,00	0,89	21,60%	0,00
10_5	4 224,27	2,88	26,94%	0,02	0,46	24,90%	0,00	0,49	24,90%	0,00
15_1	4 760,47	1,90	17,59%	0,00	1,02	17,42%	0,02			
15_2	4 900,33	276,27	29,89%	0,00	26,84	28,65%	0,02			
15_3	5 622,06	17,83	26,21%	0,00	7,86	24,88%	0,02			
15_4	4 466,66	70,17	27,96%	0,00	4,58	24,58%	0,00			
15_5	4 415,35	108,67	29,22%	0,00	8,17	25,87%	0,00			
20_1	6 087,81	402,68	21,24%	0,00	35,74	19,54%	0,02	31,46	19,54%	0,02
20_2	6 109,64	-	25,34%	0,00	577,09	25,20%	0,02	400,61	25,20%	0,00
20_3	6 078,09	1,93	16,63%	0,02	1,51	15,88%	0,02	1,37	15,88%	0,02
20_4	6 005,80	3943,87	24,11%	0,02	777,85	24,05%	0,02	488,28	24,05%	0,02
20_5	6 967,70	**	25,07%	0,00	24 257,24	24,74%	0,00	6 662,88	24,74%	0,00
25_1	7 188,73	**	25,55%	0,02	365,96	23,64%	0,02			
25_2	7 655,90	**	21,17%	0,02	**	21,10%	0,02			
25_3	8 068,57	**	22,50%	0,02	4 737,55	22,10%	0,02			
25_4	7 206,07	**	19,58%	0,02	9,27	18,13%	0,02			
25_5	8 834,87	**	23,21%	0,00	17 820,51	20,00%	0,03			
30_1	10 238,45	**	18,94%	0,02	**	18,80%	0,02	**	18,80%	0,03
30_2	9 249,37	**	19,66%	0,03	9 651,34	17,97%	0,03	41 889,60	17,97%	0,03
30_3	10 058,51	**	16,75%	0,02	292,61	16,45%	0,02	204,03	16,45%	0,02
30_4	8 187,63	**	19,46%	0,02	109,36	18,91%	0,03	188,63	18,91%	0,03
30_5	8 231,00	**	17,61%	0,02	9 637,32	17,54%		3 427,41	17,54%	0,02
35_1	9 710,63	**	18,10%	0,02	169 300,37	17,94%	0,11			
35_2	8 786,20	**	18,37%	0,02	414,79	17,65%	0,02			
35_3	11 598,89	**	18,26%	0,02	**	16,86%	0,03			
35_4	8 895,50	**	20,29%	0,03	**	20,23%	0,02			
35_5	9 081,84	**	16,92%	0,03	1 414,89	16,69%	0,05			
40_1	11 298,93	**	18,28%	0,03	**	18,02%	0,03	**	18,02%	0,03
40_2	9 607,47	**	20,82%	0,03	**	20,17%	0,03	**	20,17%	0,05
40_3	11 363,73	**	18,84%	0,03	**	18,39%	0,03	**	18,39%	0,03
40_4	9 539,34	**	17,36%	0,03	**	17,28%	0,03	**	17,28%	0,03
40_5	10 869,48	**	17,25%	0,03	**	16,71%	0,03	**	16,71%	0,03
45_1	11 801,57	**	15,47%	0,03	**	15,39%	0,03			
45_2	11 047,35	**	17,73%	0,03	**	17,43%	0,05			
45_3	12 235,15	**	15,14%	0,05	**	14,61%	0,05			
45_4	11 458,43	**	18,15%	0,05	**	17,78%	0,05			
45_5	11 080,39	**	14,34%	0,03	**	14,28%	0,05			
50_1	12 266,51	**	17,14%	0,05	**	16,37%	0,06	**	16,37%	0,06
50_2	12 544,50	**	17,13%	0,05	**	15,81%	0,06	**	15,81%	0,06
50_3	12 709,04	**	17,25%	0,05	**	16,48%	0,06	**	16,48%	0,06
50_4	13 773,25	**	15,87%	0,03	**	15,32%	0,05	**	15,32%	0,05
50_5	12 922,67	**	17,01%	0,05	**	17,01%	0,05	**	17,01%	0,05



## APÊNDICE A. RESULTADOS COMPLETOS

Tabela A.9: Resultados obtidos pelos modelos Fluxos, FluxosY e FluxosY-QS sob a política OU em H=6.

Política OU										
H=6										
Instâncias	P.I.	Fluxos			FluxosY			FluxosY-QS		
		CPU (PI)	%GAP	CPU (RL)	CPU (PI)	%GAP	CPU (RL)	CPU (PI)	%GAP	CPU (RL)
5_1	4 367,15	1,49	25,55%	0,02	0,25	25,21%	0,02			
5_2	3 782,07	1,29	31,14%	0,00	0,44	29,82%	0,00			
5_3	6 459,48	3,16	29,17%	0,02	0,30	27,63%	0,02			
5_4	4 228,57	1,02	26,91%	0,00	0,24	24,35%	0,00			
5_5	4 138,50	0,74	26,29%	0,00	0,32	20,38%	0,00			
10_1	8 669,28	153,25	22,62%	0,02	14,68	22,25%	0,02	16,96	22,25%	0,03
10_2	8 713,89	15,54	26,19%	0,03	9,28	22,02%	0,03	9,19	22,02%	0,02
10_3	7 849,28	15,96	23,42%	0,03	8,90	22,18%	0,02	9,09	22,18%	0,02
10_4	8 376,82	14,84	20,86%	0,02	6,92	20,01%	0,02	4,50	20,01%	0,02
10_5	8 820,36	9,49	21,75%	0,03	8,56	19,99%	0,02	8,85	19,99%	0,02
15_1	10 506,10	25,65	17,19%	0,08	24,91	16,97%	0,08			
15_2	10 347,90	31,69	24,81%	0,08	23,77	24,45%	0,11			
15_3	11 801,48	40,18	19,03%	0,08	35,37	18,70%	0,09			
15_4	9 624,83	21,35	24,42%	0,08	21,63	22,55%	0,08			
15_5	9 189,33	21,80	20,75%	0,08	26,64	19,13%	0,06			
20_1	13 033,37	85,24	17,40%	0,19	110,46	16,52%	0,19	162,03	16,52%	0,16
20_2	12 790,32	82,07	22,60%	0,14	97,77	22,42%	0,19	84,76	22,42%	0,17
20_3	13 929,02	35,62	20,02%	0,16	32,27	20,02%	0,16	40,17	20,02%	0,14
20_4	13 052,91	114,65	21,78%	0,16	69,89	21,50%	0,16	79,87	21,50%	0,14
20_5	14 650,90	129,45	21,27%	0,19	97,79	19,93%	0,19	123,97	19,93%	0,17
25_1	15 106,18	161,60	21,17%	0,23	155,13	20,36%	0,22			
25_2	16 083,97	8 257,48	17,25%	0,25	1107,00	16,99%	0,23			
25_3	17 128,04	249,65	19,55%	0,25	197,10	19,04%	0,24			
25_4	15 507,22	117,19	18,34%	0,24	166,87	17,72%	0,22			
25_5	18 091,41	5 928,04	16,84%	0,27	4102,48	14,94%	0,22			
30_1	21 159,81	4 043,07	15,43%	0,34	794,02	15,37%	0,33	2 143,43	15,37%	0,34
30_2	19 061,34	1 906,47	14,98%	0,31	2704,62	14,10%	0,30	1 865,94	14,10%	0,31
30_3	21 080,66	948,00	15,34%	0,30	1500,75	15,14%	0,31	590,55	15,14%	0,33
30_4	17 121,78	512,10	16,46%	0,31	1053,42	16,14%	0,30	1 295,01	16,14%	0,31
30_5	21 159,81	**	30,78%	**	749,26	15,37%	0,33	1 302,19	16,14%	0,36
35_1	**	**	**	**	**	**	**			
35_2	18 654,68	**	16,16%	0,44	1661,97	15,70%	0,36			
35_3	24 008,31	**	14,89%	0,45	9166,11	14,13%	0,41			
35_4	18 570,50	**	16,99%	0,45	11908,57	16,85%	0,34			
35_5	**	**	**	**	**	**	**			

Tabela A.10: Resultados obtidos pelos modelos MTZ, MTZ-Y e MTZ-Y-QS sob a política OU em H=6.

Política OU										
H=6										
		MTZ			MTZ-Y			MTZ-Y-QS		
Instâncias	P.I.	CPU (PI)	%GAP	CPU (RL)	CPU (PI)	%GAP	CPU (RL)	CPU (PI)	%GAP	CPU (RL)
5_1	4 367,15	0,46	26,90%	0,00	0,46	26,41%	0,02			
5_2	3 782,07	0,58	31,83%	0,00	0,34	31,48%	0,00			
5_3	6 459,48	3,73	31,51%	0,00	1,84	30,18%	0,00			
5_4	4 228,57	1,41	31,29%	0,00	0,40	24,78%	0,00			
5_5	4 138,50	13,55	30,35%	0,00	0,52	20,84%	0,00			
10_1	8 669,28	**	26,52%	0,02	13 185,07	25,88%	0,02	11 946,03	25,88%	0,00
10_2	8 713,89	**	33,65%	0,00	10,44	23,80%	0,02	12,55	23,80%	0,02
10_3	7 849,28	2953,88	25,82%	0,02	17,93	23,45%	0,00	15,57	23,45%	0,00
10_4	8 376,82	1328,68	23,46%	0,00	155,84	22,96%	0,02	182,32	22,96%	0,02
10_5	8 820,36	137,19	23,03%	0,02	5,02	21,16%	0,02	4,02	21,16%	0,00
15_1	10 506,10	**	18,86%	0,00	397,53	18,21%	0,02			
15_2	10 347,90	**	27,76%	0,00	26 907,35	27,02%	0,02			
15_3	11 801,48	**	21,85%	0,00	2 991,59	19,95%	0,02			
15_4	9 624,83	**	27,82%	0,00	35 009,90	23,51%	0,03			
15_5	9 189,33	**	25,20%	0,02	67,43	21,59%	0,02			
20_1	13 033,37	**	21,74%	0,03	**	19,50%	0,02	**	19,50%	0,02
20_2	12 790,32	**	23,94%	0,02	**	23,77%	0,02	**	23,77%	0,03
20_3	13 929,02	**	21,90%	0,03	**	21,04%	0,03	**	21,04%	0,03
20_4	13 052,91	**	24,01%	0,02	**	23,89%	0,03	**	23,89%	0,03
20_5	14 650,90	**	23,80%	0,03	**	22,96%	0,03	**	22,96%	0,03
25_1	15 106,18	**	23,27%	0,03	**	21,29%	0,03			
25_2	16 083,97	**	19,21%	0,03	**	19,14%	0,03			
25_3	17 128,04	**	22,12%	0,03	**	21,25%	0,03			
25_4	15 507,22	**	20,15%	0,05	**	18,50%	0,05			
25_5	18 091,41	**	20,39%	0,03	**	15,60%	0,05			
30_1	21 159,81	**	17,47%	0,03	**	17,27%	0,05	**	17,27%	0,03
30_2	19 061,34	**	16,69%	0,05	**	14,58%	0,08	**	14,58%	0,08
30_3	21 080,66	**	16,39%	0,05	**	15,97%	0,05	**	15,97%	0,05
30_4	17 121,78	**	17,79%	0,03	**	16,91%	0,08	**	16,91%	0,06
30_5	21 159,81	**	31,95%	0,05	**	31,87%	0,05	**	15,80%	0,05
35_1	**	**	**	**	**	**	**			
35_2	18 654,68	**	17,47%	0,06	**	16,65%	0,06			
35_3	24 008,31	**	16,89%	0,05	**	14,87%	0,09			
35_4	18 570,50	**	18,56%	0,05	**	18,44%	0,06			
35_5	**	**	**	**	**	**	**			

## APÊNDICE A. RESULTADOS COMPLETOS

Tabela A.11: Resultados obtidos pelos modelos Fluxos, FluxosY e FluxosY-QS sob a política OU em H=10.

Política OU										
H=10										
Instâncias	P.I.	Fluxos			FluxosY			FluxosY-QS		
		CPU (PI)	%GAP	CPU (RL)	CPU (PI)	%GAP	CPU (RL)	CPU (PI)	%GAP	CPU (RL)
5_1	7 506,60	4,93	23,23%	0,00	1,21	22,81%	0,00			
5_2	6 523,54	6,79	28,89%	0,02	1,72	27,62%	0,00			
5_3	10 935,00	5,71	26,24%	0,00	1,07	24,58%	0,00			
5_4	7 258,15	6,01	24,94%	0,00	1,35	22,46%	0,02			
5_5	6 842,92	5,80	20,82%	0,02	1,59	14,11%	0,00			
10_1	14 410,73	325,15	19,48%	0,05	45,24	19,01%	0,06	58,84	19,01%	0,06
10_2	14 747,89	60,80	23,62%	0,06	29,62	18,94%	0,06	62,07	18,94%	0,06
10_3	13 258,56	110,42	20,69%	0,05	39,10	19,22%	0,05	49,64	19,22%	0,06
10_4	14 194,64	395,98	19,52%	0,05	42,39	18,64%	0,05	185,44	18,64%	0,06
10_5	15 035,89	80,43	21,01%	0,05	33,35	19,14%	0,05	48,75	19,14%	0,05
15_1	17 737,11	117,68	15,43%	0,14	91,88	15,12%	0,16			
15_2	17 737,80	364,40	24,60%	0,14	167,31	24,25%	0,17			
15_3	19 863,19	470,89	16,59%	0,17	267,00	16,29%	0,13			
15_4	16 375,09	104,92	23,67%	0,17	119,54	21,63%	0,16			
15_5	15 794,41	369,95	20,29%	0,16	270,90	18,64%	0,14			
20_1	22 060,83	4 258,80	16,48%	0,31	8903,69	15,47%	0,33	7 664,94	15,47%	0,27
20_2	21 408,06	735,57	21,03%	0,30	510,60	20,80%	0,30	761,98	20,80%	0,30
20_3	23 417,26	141,96	18,45%	0,33	218,13	18,45%	0,25	344,62	18,45%	0,28
20_4	22 290,52	8 230,83	21,28%	0,28	12704,21	20,98%	0,30	7 278,64	20,98%	0,34
20_5	25 021,54	7 511,99	20,99%	0,33	7953,57	19,44%	0,30	5 236,75	19,44%	0,30

Tabela A.12: Resultados obtidos pelos modelos MTZ, MTZ-Y e MTZ-Y-QS sob a política OU em H=10.

Política OU										
H=10										
Instâncias	P.I.	MTZ			MTZ-Y			MTZ-Y-QS		
		CPU (PI)	%GAP	CPU (RL)	CPU (PI)	%GAP	CPU (RL)	CPU (PI)	%GAP	CPU (RL)
5_1	7 506,60	6,02	24,43%	0,02	4,75	23,91%	0,00			
5_2	6 523,54	14,47	29,52%	0,00	3,90	28,72%	0,00			
5_3	10 935,00	218,49	28,91%	0,02	13,29	27,39%	0,02			
5_4	7 258,15	28,20	29,32%	0,00	2,07	22,91%	0,00			
5_5	6 842,92	352,08	25,24%	0,00	3,22	14,71%	0,00			
10_1	14 410,73	**	23,47%	0,02	**	22,64%	0,02	**	22,64%	0,02
10_2	14 747,89	**	31,70%	0,02	**	20,79%	0,03	**	20,79%	0,02
10_3	13 258,56	**	23,17%	0,00	**	20,24%	0,02	**	20,24%	0,02
10_4	14 194,64	**	22,12%	0,02	**	21,55%	0,02	**	21,55%	0,02
10_5	15 035,89	**	22,12%	0,02	**	20,31%	0,02	**	20,31%	0,00
15_1	17 737,11	**	17,15%	0,06	**	16,29%	0,05			
15_2	17 737,80	**	27,55%	0,03	**	26,97%	0,05			
15_3	19 863,19	**	19,60%	0,02	**	17,53%	0,05			
15_4	16 375,09	**	27,21%	0,03	**	22,43%	0,08			
15_5	15 794,41	**	24,83%	0,03	**	21,19%	0,03			
20_1	22 060,83	**	21,09%	0,03	**	18,63%	0,05	**	18,63%	0,05
20_2	21 408,06	**	22,43%	0,03	**	22,27%	0,05	**	22,27%	0,03
20_3	23 417,26	**	20,30%	0,03	**	19,48%	0,05	**	19,48%	0,05
20_4	22 290,52	**	23,46%	0,05	**	23,39%	0,03	**	23,39%	0,05
20_5	25 021,54	**	23,73%	0,03	**	22,72%	0,06	**	22,72%	0,05

Tabela A.13: Resultados obtidos para a nova política NP, recorrendo ao modelo FluxosY em H=3.

<b>H=3</b>				
<b>n</b>	<b>P.I.</b>	<b>CPU (PI)</b>	<b>%Gap</b>	<b>CPU (RL)</b>
10_1	4 798,41	0,24	20,92%	0,00
10_2	5 008,83	0,23	21,77%	0,02
10_3	4 511,46	0,19	21,23%	0,00
10_4	4 668,46	0,22	21,13%	0,00
10_5	4 916,95	0,24	18,31%	0,02
20_1	7 170,89	2,09	17,15%	0,05
20_2	7 164,30	2,70	25,03%	0,05
20_3	7 892,48	2,32	22,49%	0,03
20_4	7 351,79	1,89	23,94%	0,05
20_5	7 974,18	1,28	18,30%	0,05
30_1	11 563,91	16,16	16,59%	0,14
30_2	10 568,95	13,02	15,75%	0,14
30_3	11 661,48	11,00	16,38%	0,14
30_4	9 325,11	5,43	16,90%	0,14
30_5	9 654,39	13,01	17,01%	0,14
40_1	12 901,25	43,06	17,63%	0,25
40_2	11 140,59	27,17	17,70%	0,25
40_3	12 890,68	36,61	15,68%	0,27
40_4	11 364,30	19,81	20,93%	0,24
40_5	12 405,22	11,95	16,36%	0,25
50_1	13 768,12	70,98	14,19%	0,45
50_2	14 344,20	25,97	15,29%	0,36
50_3	14 328,88	43,22	14,85%	0,42
50_4	15 577,98	45,04	14,21%	0,39
50_5	14 586,11	34,02	15,58%	0,48

Tabela A.14: Resultados obtidos para a nova política NP, recorrendo ao modelo FluxosY em H=6.

<b>H=6</b>				
<b>n</b>	<b>P.I.</b>	<b>CPU (PI)</b>	<b>%Gap</b>	<b>CPU (RL)</b>
10_1	9 333,31	1,52	19,31%	0,03
10_2	9 599,80	1,29	18,77%	0,03
10_3	8 872,13	3,17	20,77%	0,03
10_4	8 812,07	1,22	16,70%	0,03
10_5	9 562,20	2,49	17,63%	0,02
20_1	13 860,28	46,96	15,03%	0,14
20_2	13 736,00	19,90	22,40%	0,16
20_3	14 078,12	8,82	14,01%	0,13
20_4	14 076,03	48,82	20,99%	0,14
20_5	15 934,35	79,12	19,30%	0,16
30_1	22 630,01	612,77	15,69%	0,31
30_2	20 516,12	1734,94	13,91%	0,31
30_3	22 380,17	116,63	14,27%	0,28
30_4	18 438,94	735,61	16,46%	0,28
30_5	18 555,84	513,08	14,98%	0,31

Tabela A.15: Resultados obtidos para a nova política NP, recorrendo ao modelo FluxosY em H=10.

<b>H=10</b>				
<b>n</b>	<b>P.I.</b>	<b>CPU (PI)</b>	<b>%Gap</b>	<b>CPU (RL)</b>
<b>10_1</b>	15 369,71	41,31	18,92%	0,05
<b>10_2</b>	15 788,25	15,48	17,92%	0,05
<b>10_3</b>	14 552,52	41,08	20,05%	0,05
<b>10_4</b>	14 524,50	19,25	16,05%	0,06
<b>10_5</b>	15 720,71	22,82	17,46%	0,05
<b>20_1</b>	22 806,16	452,49	14,31%	0,30
<b>20_2</b>	22 694,80	252,13	22,07%	0,27
<b>20_3</b>	23 412,12	47,87	14,30%	0,28
<b>20_4</b>	23 206,39	810,04	20,37%	0,27
<b>20_5</b>	26 233,06	2110,37	18,89%	0,36